Aussagenformen

Eine Aussagenform über den Universen $U_1, \ldots, U_n$

ist ein Satz mit den (freien) Variablen $x_1, \ldots, x_n$,

der zu einer Aussage wird,

wenn jedes x_i durch ein Element aus U_i ersetzt wird.

Universen

In der Mathematik treten als Universum häufig die folgenden Zahlenmengen auf:

Die Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
Die Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
Die Menge der positiven natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$
Die Menge der rationalen Zahlen	$\mathbb{Q}$
Die Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{R}$

Quantoren

Aussage	wahr	falsch
$\forall x : P(x)$	$P(x)$ ist wahr für alle $x \in X$	Es existiert $x \in X$ mit $P(x)$ falsch
$\exists x : P(x)$	Es existiert $x \in X$ mit $P(x)$ wahr	$P(x)$ ist falsch für alle $x \in X$

$\neg(\forall x : P(x))$ hat den gleichen Wahrheitswert wie $\exists x : (\neg P(x))$

$\neg(\exists x : P(x))$ hat den gleichen Wahrheitswert wie $\forall x : (\neg P(x))$

Wichtige Äquivalenzen

Negationsregeln

$$\neg\forall x : P(X) \equiv \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg\exists x : P(X) \equiv \forall x : \neg P(x)$$

Ausklammerregeln

$$(\forall x : P(x)) \wedge (\forall y : Q(y)) \equiv \forall x : (P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\exists x : P(x)) \vee (\exists y : Q(y)) \equiv \exists x : (P(x) \vee Q(x))$$

Vertauschungsregeln

$$\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$$