

Aussagenformen

Negationsregeln

$$\neg \forall x : p(x) \equiv \exists x : \neg p(x) \quad \neg \exists x : p(x) \equiv \forall x : \neg p(x)$$

Ausklammerregeln

$$((\forall x : p(x)) \wedge (\forall x : q(x))) \equiv \forall x : (p(x) \wedge q(x))$$

$$((\forall x : p(x)) \vee (\forall x : q(x))) \Rightarrow \forall x : (p(x) \vee q(x)) \text{ (nicht umgekehrt)}$$

$$((\exists x : p(x)) \vee (\exists x : q(x))) \equiv \exists x : (p(x) \vee q(x))$$

$$((\exists x : p(x)) \wedge (\exists x : q(x))) \Leftarrow \exists x : (p(x) \wedge q(x)) \text{ (nicht umgekehrt)}$$

Vertauschungsregeln

$$((\forall x \forall y : p(x, y)) \equiv (\forall y \forall x : p(x, y)))$$

$$((\exists x \exists y : p(x, y)) \equiv (\exists y \exists x : p(x, y)))$$

Aussagen und Aussagenformen: Beispiele

Beispiel 1

“Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?”
wurde ein 100-jähriger gefragt.

Ich halte mich streng an die Diätregeln:

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich
immer Fisch.

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe,
verzichte ich auf Eiskreme.

Wenn ich Eiskreme habe oder Bier meide, dann rühre ich
Fisch nicht an.

Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

▶ $\neg B \Rightarrow F$

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiskreme.

▶ $F \wedge B \Rightarrow \neg E$

Wenn ich Eiskreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.

▶ $E \vee \neg B \Rightarrow \neg F$

Beispiel 2

Jemand, der in Schloß Dreadbury wohnt, hat Tante Agatha ermordet. Agatha, ihr Butler und ihr Neffe Charles waren die einzigen Bewohner von Schloß Dreadbury. Ein Mörder haßt immer sein Opfer und ist niemals reicher als sein Opfer. Charles haßt niemanden, den Tante Agatha gehaßt hat. Agatha hat jeden gehaßt außer ihrem Butler. Der Butler haßt jeden, der nicht reicher ist als Tante Agatha. Der Butler haßt jeden, den Tante Agatha gehaßt hat. Niemand haßt jeden. Agatha war nicht der Butler.

Wer hat Tante Agatha ermordet?

Beispiel 2

Jemand, der in Schloß Dreadbury wohnt, hat Tante Agatha ermordet.

▶ $\exists x (\text{schloßbewohner}(x) \wedge \text{ermordet}(x, a))$

Agatha, ihr Butler und ihr Neffe Charles waren die einzigen Bewohner von Schloß Dreadbury.

▶ $\forall x (\text{schloßbewohner}(x) \Leftrightarrow (x = a \vee x = b \vee x = c))$

Beispiel 2

Ein Mörder haßt immer sein Opfer und ist niemals reicher als sein Opfer.

- ▶ $\forall x, y (\text{ermordet}(x, y) \rightarrow \text{haßt}(x, y))$
 $\forall x, y (\text{ermordet}(x, y) \rightarrow \neg \text{reicher}(x, y))$

Charles haßt niemanden, den Tante Agatha geüßt hat.

- ▶ $\forall x (\text{haßt}(c, x) \rightarrow \neg \text{haßt}(a, x))$

Agatha hat jeden geüßt auüer ihrem Butler.

- ▶ $\forall x (\neg \text{haßt}(a, x) \Leftrightarrow x = b)$

Beispiel 2

Der Butler **haßt jeden**, der nicht **reicher** ist als Tante **Agatha**.

▶ $\forall x (\neg \text{reicher}(x, a) \rightarrow \text{haßt}(b, x))$

Der Butler **haßt jeden**, den Tante **Agatha** **gehaßt hat**.

▶ $\forall x (\text{haßt}(a, x) \rightarrow \text{haßt}(b, x))$

Niemand **haßt jeden**.

▶ $\forall x \exists y (\neg \text{haßt}(x, y))$

Agatha war nicht der **Butler**.

▶ $\neg a = b$