Mengen und Mengenoperationen

Es ist prinzipiell nicht möglich, den fundamentalen Begriff der Menge streng mathematisch zu definieren.

Mengen und Mengenoperationen

Erklärung (Cantor, 1985)

Eine Menge ist eine Zusamenfassung bestimmter, wohlunterschiedlicher Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, wobei von jedem dieser Objekte eindeutig feststeht, ob er zur Menge gehört oder nicht.

Die Objekte der Menge heißen Elemente der Menge.

Elementrelation: $a \in A$

Gehört a nicht zu A: $\neg(a \in A)$ (i.Z. auch $a \notin A$)

Russell'sches Paradox

Problem 1. Ist $A = \ldots\{\{\{1\}\}\}\ldots$ (unendlich viele Klammern) eine Menge oder nicht? Falls man A als Menge zuläßt, so gilt $A = \{A\}$, also $A \in A$.

Betrachten man nur die "braven" Mengen, die $A \in A$ nicht erfüllen, so erhält man:

Problem 2. (Russell'sches Paradox) Sei $M = \{A \mid A \notin A\}$

M ist nach Cantor eine Menge. Nun gilt aber:

(i) Falls $M \in M$, so erfüllt M die Eigenschaft $M \notin M$. Widerspruch.

(ii) Falls $M \notin M$, so erfüllt M die charakteristische Eigenschaft von M, d.h. $M \in M$. Widerspruch.

Klassen und Mengen

Klasse: alles, was nach Cantor eine Menge ist.

Als “Mengen” nur gewisse Klassen zugelassen

$\mapsto$ Axiomatische Mengenlehre

Idee

Die Bildung der Mengen ist erst dann erlaubt, wenn ihre Elemente bereits gebildet sind.

Wohlfundiertheitsaxiom

Es gibt keine unendliche Folgen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
mit $x_{n+1} \in x_n$ für alle n

Mengen: Begriffe

Menge: Zusammenfassung von Objekten

Die Konstituenten der Menge: Elemente der Menge

i.Z. $a \in A$

Endliche Menge: Menge, die nur endlich viele Elemente hat.

Unendliche Menge: Menge, die unendlich viele Elemente hat.

Mengen: Begriffe

Bemerkungen

Keine Anordnung für die Elementen

Es ist wichtig, zwischen einer Menge und ihren Beschreibungen zu unterscheiden

$$\{1, 2, 3\}, \quad \{2, 1, 3\}, \quad \{1, 2, 3, 1\}$$

drei verschiedene Beschreibungen ein und derselben Menge.

Kardinalität

Anzahl der Elemente einer Menge M heisst Mächtigkeit oder Kardinalität, und wird durch $\#M$, $|M|$, oder auch $\mathrm{card}(M)$ bezeichnet.

Mengen: Begriffe

Darstellung mittels definierenden Eigenschaften

Mengenbildungsaxiom

Zu einer Aussagenform $E(x)$ über einem fest vorgegebenen Universum U (wo U eine Menge ist) existiert stets genau eine Menge M, die gerade aus allen Objekten x aus U besteht, für welche $E(x)$ eine wahre Aussage ist.

Jedes Element e von U mit $E(e)$ wahr heißt Element von M.

$E(x)$ heißt erzeugende Aussagenform von M,

Bezeichnung: $M \overset{\text{def}}{=} \{x \in U \mid E(x)\}$

Gleichheit von Mengen

Gleichheitsaxiom (Extensionalitätsaxiom)

Mengen M_1 und M_2 sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Ist $E_1(x)$ eine erzeugende Aussagenform von M_1 (über U)
und $E_2(x)$ eine erzeugende Aussagenform von M_2 (über U), so gilt:

$$M_1 = M_2 \quad \text{gdw.} \quad \forall x : (E_1(x) \Leftrightarrow E_2(x)) \text{ wahr ist.}$$