Mengen und Mengenoperationen

Mengen

- Definition, Beispiele

- Endliche u. Unendliche Mengen, Kardinalität.

- Darstellung mittels definierenden Eigenschaften

- Gleichheit von Mengen

- Komplement von M in U

- Teilmenge und Obermenge

- Potenzmenge und Mengenfamilien

Potenzmenge und Mengenfamilien

Sei M eine Menge.

$\mathcal{P}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{N \mid N \subseteq M\}$ Potenzmenge von M

$\emptyset \in \mathcal{P}(M)$

$M \in \mathcal{P}(M)$

Ist M endlich, so ist auch $\mathcal{P}(M)$ endlich.

Potenzmenge und Mengenfamilien

$$\mathcal{P}^m(M) = \underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\ldots\mathcal{P}}_{m \text{ mal}}(M)\ldots))$$

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}^2(\emptyset) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^3(\emptyset) \quad &= \mathcal{P}(\mathcal{P}^2(\emptyset)) = \\ &= \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{aligned}$$

Potenzmenge und Mengenfamilien

$$\mathcal{P}^m(M) = \underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\ldots\mathcal{P}}_{m \text{ mal}}(M)\ldots))$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^2(\{1,2\}) &= \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\})) \\
&= \mathcal{P}(\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}) \\
&= \{\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1,2\}\}, \\
&\qquad \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1,2\}\}, \\
&\qquad \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1,2\}\}, \{\{2\}, \{1,2\}\}, \\
&\qquad \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}\}, \\
&\qquad \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \quad \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}
\end{aligned}$$

Potenzmenge und Mengenfamilien

Mengen von Mengen werden auch Mengenfamilien genannt.

Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge.
Für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ heißt die Mengenfamilie

$(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \{N \in \mathcal{P}(M) \mid A \subset N \subset B\}$ (offenes) Intervall zwischen A u. B

$<A, B> \stackrel{\text{def}}{=} \{N \in \mathcal{P}(M) \mid A \subseteq N \subseteq B\}$ abgeschlossenes Intervall zw. A u. B

$<A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \{N \in \mathcal{P}(M) \mid A \subseteq N \subset B\}$, $(A, B> \stackrel{\text{def}}{=} \{N \in \mathcal{P}(M) \mid A \subset N \subseteq B\}$
links bzw. rechts abgeschlossenes Intervall zwischen A und B

Mengenoperationen

Vereinigung

Durchschnitt

Differenz

Vereinigung

Seien M_1, M_2 Mengen.

Die Gesamtheit aller Elemente die zu M_1 oder zu M_2 gehören bildet eine Menge, die als Vereinigung von M_1 und M_2 bezeichnet wird.

Bezeichnung: $M_1 \cup M_2$

$M_1 \cup M_2 = \{x \mid (x \in M_1) \vee (x \in M_2)\}$

Durchschnitt

Seien M_1, M_2 Mengen.

Die Gesamtheit aller Elemente die sowohl zu M_1 als auch zu M_2 gehören bildet eine Menge, die als Durchschnitt von M_1 und M_2 bezeichnet wird.

Bezeichnung: $M_1 \cap M_2$

$$\begin{aligned} M_1 \cap M_2 &= \{x \mid (x \in M_1) \land (x \in M_2)\} \\ &= \{x \in M_1 \mid x \in M_2\} \\ &= \{x \in M_2 \mid x \in M_1\} \end{aligned}$$

Differenz

Seien M_1, M_2 Mengen.

Die Gesamtheit aller Elemente die zur Menge M_1 gehören, aber nicht zur Menge M_2, bildet eine Menge, die als Differenz von M_1 und M_2 bezeichnet wird.

Bezeichnung: $M_1 - M_2$

$M_1 - M_2 = \{x \mid (x \in M_1) \wedge (x \notin M_2)\}$

Mengenoperationen: Eigenschaften

Satz. Für beliebige Mengen M_1, M_2 gilt:

(1) $M_1 \cap M_2 \subseteq M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$

(2) $M_1 \cap M_2 \subseteq M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$

Satz. Für jede Menge M gilt: $M \cap M = M \cup M = M$.

Satz. Für beliebige Mengen M_1, M_2 gilt:

(1) $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$

(2) $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$

(3) $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$

(4) $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$

Mengenoperationen: Eigenschaften

Satz. Für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3 gilt:

(1) $M_1 \subseteq M_2$ gdw. $M_1 \cup M_2 = M_2$

(2) $M_1 \subseteq M_2$ gdw. $M_1 \cap M_2 = M_1$

Mengenoperationen: Eigenschaften

Zusammenhang zwischen logischen Verknüpfungen
von Aussagenformen und Mengenoperationen

$M_1 = \{x \mid E_1(x)\}$ $\qquad$ $M_2 = \{x \mid E_2(x)\}$

$$M_1 \cup M_2 = \{x \mid E_1(x) \vee E_2(x)\}$$

$$M_1 \cap M_2 = \{x \mid E_1(x) \wedge E_2(x)\}$$

$$M_1 - M_2 = \{x \mid E_1(x) \wedge (\neg E_2(x))\}$$

Mengenoperationen: Eigenschaften

Satz. Für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3 gilt:

(1) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$

(2) $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$

entsprechend:

Distributivgesetzen für die logischen Konnektoren $\vee$, $\wedge$:

(1) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(2) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Mengenoperationen: Eigenschaften

Satz. Für beliebige Mengen M_1, M_2 gilt:

(1) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$

(2) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$

entsprechend:
Absorption für die logischen Konnektoren $\vee$, $\wedge$:

(1) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

(2) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Mengenoperationen: Eigenschaften

Satz. Für beliebige Mengen $M_1, M_2 \subseteq U$ gilt:

(1) $\overline{M_1 \cap M_2} = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2$

(2) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$

entsprechend:
deMorgan'schen Regeln für die logischen Konnektoren $\vee$, $\wedge$:

(1) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

(1) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Vereinigung/Durchschnitt von Mengenfamilien

Aufgrund ihrer Assoziativität und Kommutativität können die beiden Mengenoperationen Vereinigung und Durchschnitt auch auf Mengenfamilien angewendet werden.

Annahme: betrachtet werden nur Familien, die Teilmenge einer Potenzmenge sind.

Definition. Sei M Menge und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(F)$

$\bigcup \mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{x \mid \exists N{:}(N{\in}\mathcal{F} \wedge x{\in}N)\}$ Vereinigung aller Mengen aus $\mathcal{F}$

$\bigcap \mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{x \mid \forall N{:}(N{\in}\mathcal{F} \wedge x{\in}N)\}$ Durchschnitt aller Mengen aus $\mathcal{F}$

Produkt von Mengen

Definition.
Seien M und N zwei (nicht notwendig verschiedene) Mengen. Dann ist die Gesamtheit aller geordneten Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$ eine Menge, die (kartesisches oder direktes) Produkt von M und N genannt wird.

Bezeichnung: $M \times N$

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M \wedge n \in N\}$$

Produkt von Mengen

Begriff: geordnetes Paar

$\{m, n\}$ kein geordnetes Paar

$\{\{m\}, \{n\}\}$ kein geordnetes Paar

$\{\{m\}, \{m, n\}\}$ geordnetes Paar:

$\{\{m\}, \{m, n\}\} = \{r, \{r, s\}\}$ genau dann, wenn $m = r$ und $n = s$

Produkt von Mengen

Geordnetes k-Tupel, $k \in \mathbb{N}^+$

$$(m_1) \stackrel{\text{def}}{=} m_1; \qquad (m_1, m_2) \text{ geordnetes Paar}$$

$$(m_1, \ldots, m_k) \stackrel{\text{def}}{=} ((m_1, \ldots, m_{k-1}), m_k) \qquad k \geq 2$$

Definition. Seien $M_1, \ldots, M_k$ Mengen. Das Produkt von $M_1, \ldots, M_k$ ist die Menge, die aus allen geordneten k-Tupeln $(m_1, \ldots, m_k)$ mit $m_i \in M_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ besteht.

Bezeichnung: $M_1 \times \cdots \times M_k$, $\prod_{i=1}^{k} M_i$

$$M_1 \times \cdots \times M_k = \{(m_1, \ldots, m_k) \mid m_1 \in M_1 \wedge \cdots \wedge m_k \in M_k\}$$

Produkt von Mengen

$$M_1 \times \cdots \times M_k = \{(m_1, \ldots, m_k) \mid m_1 \in M_1 \wedge \cdots \wedge m_k \in M_k\}$$

Notation:

Gilt $M_1 = M_2 = \cdots = M_k = M$, dann schreibt man anstelle von $M_1 \times \cdots \times M_k$ kurz M^k.

Bemerkung: $M^0 = \emptyset \qquad M^1 = M$

Definition. Die Vereinigung der Produktmengen $M^0, M^1, \ldots, M^n, \ldots$ wird mit M^* bezeichnet.

$$M^* = \bigcup \{M^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Weitere Rechenregeln für Mengenoperationen

Kommutativität

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= B \cap A \\
A \cup B &= B \cup A
\end{aligned}
$$

Assoziativität

$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C
\end{aligned}
$$

Distributivität

$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\
A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}
$$

$$
(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)
$$

Weitere Rechenregeln für Mengenoperationen

Idempotenz	$A \cap A$	$=$	A	
	$A \cup A$	$=$	A	
Doppelnegation	$\overline{\overline{A}}$	$=$	A	
deMorgans Regeln	$\overline{A \cap B}$	$=$	$\overline{A} \cup \overline{B}$	
	$\overline{A \cup B}$	$=$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	
Absorption	$A \cap (A \cup B)$	$=$	A	
	$A \cap C$	$=$	$A,$	falls $A \subseteq C$
	$A \cup (A \cap B)$	$=$	A	
	$A \cup C$	$=$	$C,$	falls $A \subseteq C$