Mengen und Mengenoperationen

Mengen

- Definition, Beispiele

- Endliche u. Unendliche Mengen, Kardinalität.

- Darstellung mittels definierenden Eigenschaften

- Gleichheit von Mengen

- Komplement von M in U

- Teilmenge und Obermenge

- Potenzmenge und Mengenfamilien

- Mengenoperationen
  (Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Produkt)

Produkt von Mengen

$$M_1 \times \cdots \times M_k = \{(m_1, \ldots, m_k) \mid m_1 \in M_1 \wedge \cdots \wedge m_k \in M_k\}$$

Notation:

Gilt $M_1 = M_2 = \cdots = M_k = M$, dann schreibt man anstelle von $M_1 \times \cdots \times M_k$ kurz M^k.

Bemerkung: $M^0 = \emptyset \qquad M^1 = M$

Weitere Rechenregeln für Mengenoperationen

Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativität

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Distributivität

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

Weitere Rechenregeln für Mengenoperationen

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Idempotenz} & A \cap A & = & A \\
& A \cup A & = & A \\
\text{Doppelnegation} & \overline{\overline{A}} & = & A \\
\text{deMorgans Regeln} & \overline{A \cap B} & = & \overline{A} \cup \overline{B} \\
& \overline{A \cup B} & = & \overline{A} \cap \overline{B} \\
\text{Absorption} & A \cap (A \cup B) & = & A \\
& A \cap C & = & A, \quad \text{falls } A \subseteq C \\
& A \cup (A \cap B) & = & A \\
& A \cup C & = & C, \quad \text{falls } A \subseteq C
\end{array}
$$

Relationen

Seien M und N zwei beliebige Mengen.

Eine binäre Relation R zwischen M und N ist eine Teilmenge der Produktmenge $M \times N$.

Bezeichnung: $(x, y) \in R \qquad R(x, y) \qquad xRy$

Seien $M_1, \ldots, M_n$ n beliebige Mengen, wobei $n \geq 0$.

Eine *n*-stellige Relation R zwischen $M_1, \ldots, M_n$ ist eine Teilmenge der Produktmenge $M_1 \times \cdots \times M_n$.

Bezeichnung: $(x_1, \ldots, x_n) \in R \qquad R(x_1, \ldots, x_n)$

Relationen

Ist R eine Relation zwischen den Mengen $M_1, \dots, M_n$
und gilt $M_1 = \cdots = M_n = M$,
dann heißt R eine (n-stellige) Relation über M.

- Die Nullrelation über M: $R = \emptyset \subseteq M \times M$
- Die Gleichheitsrelation über M:
  $\Delta_M = \{(x, x) \mid x \in M\} \subseteq M \times M$ Diagonale von $M \times M$.
  id_M (Identitätsrelation über M)

Operationen auf Relationen

Mengenoperationen

$$R = S \quad \text{g.d.w.} \quad \forall (x, y) : (xRy \Leftrightarrow xSy)$$

$$R \subseteq S \quad \text{g.d.w.} \quad \forall (x, y) : (xRy \Rightarrow xSy)$$

$$\neg R = \{(x, y) \mid \neg(xRy)\}$$

$$R \cup S = \{(x, y) \mid (xRy) \vee (xSy)\}$$

$$R \cap S = \{(x, y) \mid (xRy) \wedge (xSy)\}$$

Operationen auf Relationen

Seien $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$

Inverse Relation

$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid xRy\}$

Komposition von R und S

$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y : ((xRy) \wedge (ySz)\}$

Seien $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq C \times D$

Inneres Produkt von R und S

$R \otimes S = \{((x, z), (y, u)) \mid (xRy) \wedge (zSu)\}$

Operationen auf Relationen: Eigenschaften

Satz: Seien M_1, M_2 beliebige Mengen und seien R und S Relationen zwischen $M_1 \times M_2$. Dann gilt:

(1) $\quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

(2) $\quad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

Satz: Seien M_1, M_2, M_3 beliebige Mengen und seien $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$. Dann gilt:

(3) $\quad (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Operationen auf Relationen: Eigenschaften

Satz: Sei M eine beliebige Menge und seien R, S, T Relationen über M. Dann gilt:

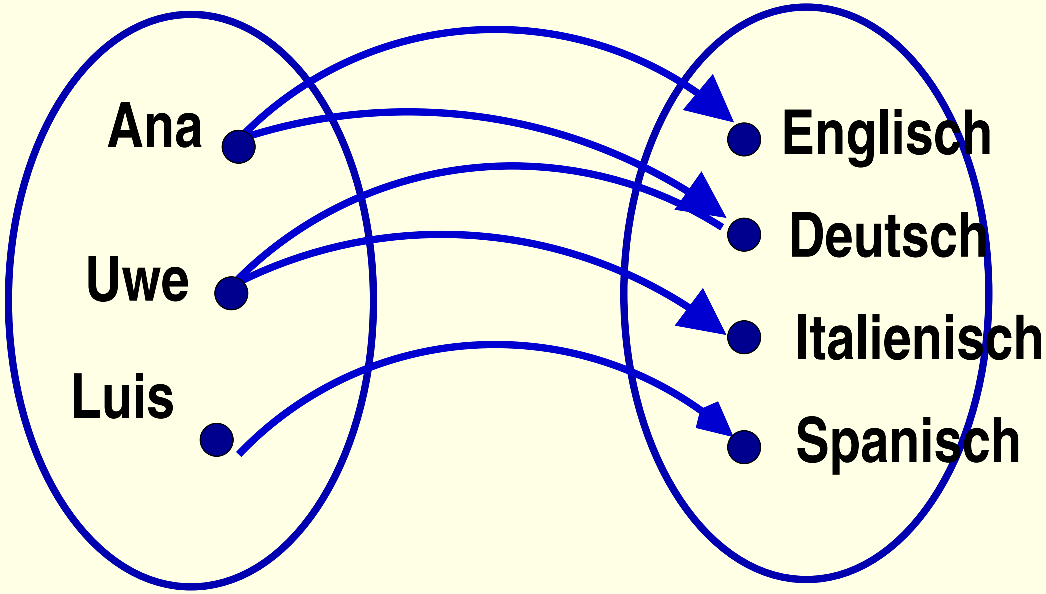
(1) $\quad (R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$

(2) $\quad T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$

(3) $\quad (R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$

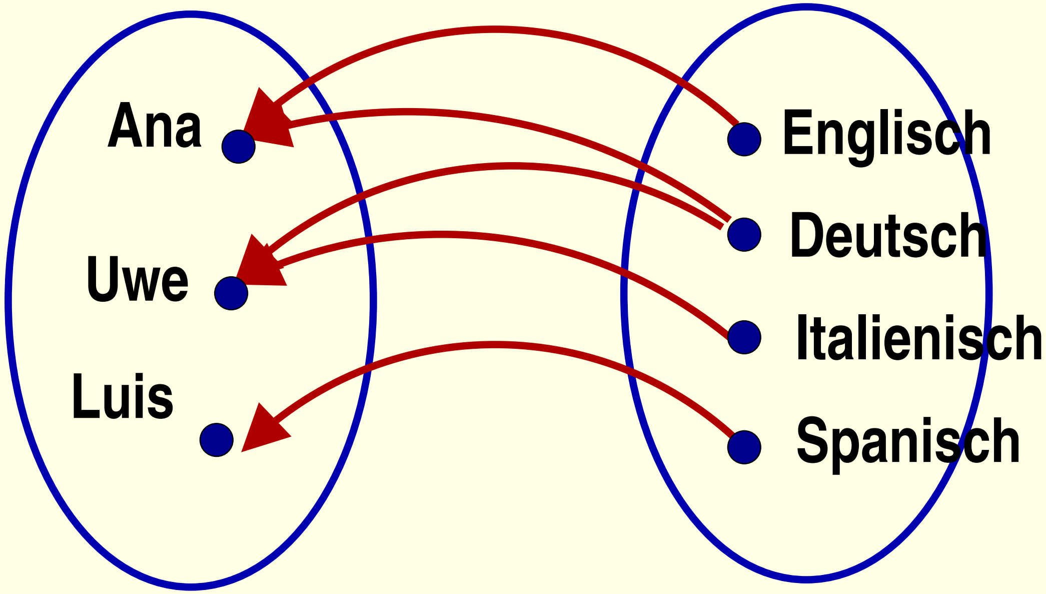
(4) $\quad T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$

Relationen



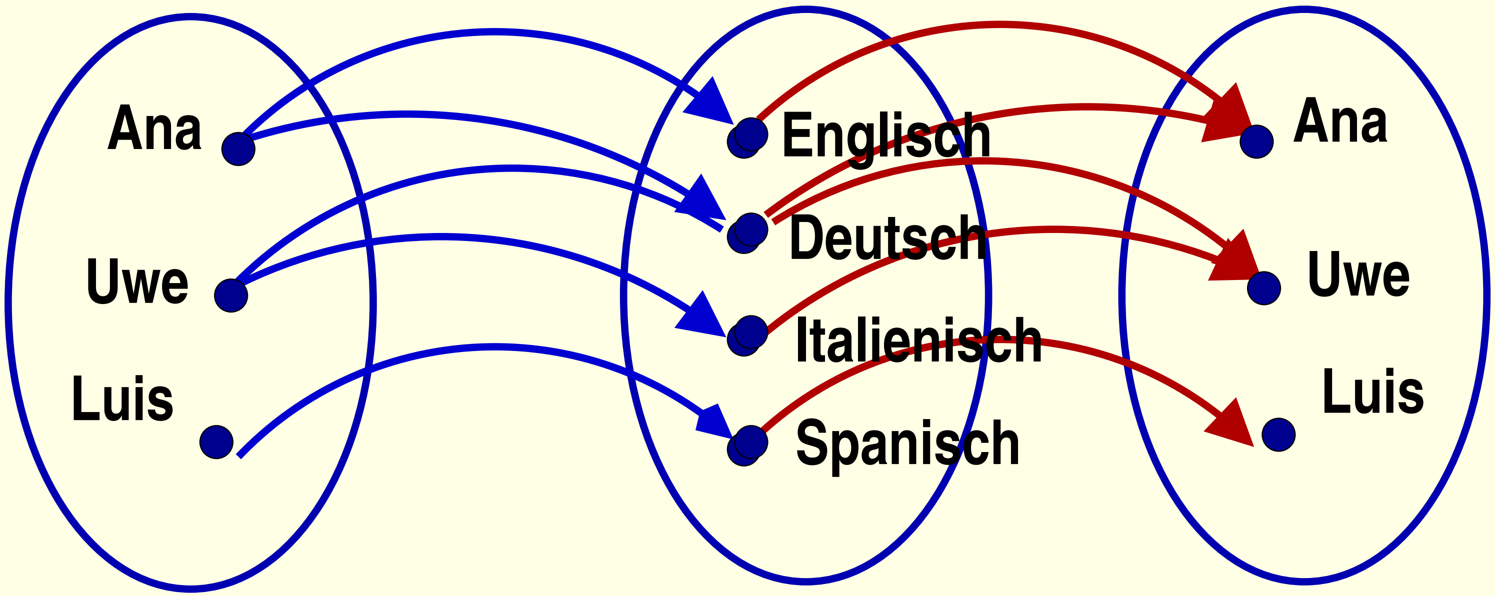
R = { (Ana, Englisch), (Ana, Deutsch),
(Uwe, Deutsch), (Uwe, Italienisch),
(Luis, Spanisch) }

Relationen



R^{-1} = { (Englisch, Ana), (Deutsch, Ana),
(Deutsch, Uwe), (Italienisch, Uwe),
(Spanisch, Luis) }

Relationen



$R \circ R^{-1}$ = { (Ana, Ana), (Ana, Uwe),
(Uwe, Uwe), (Uwe, Ana),
(Luis, Luis) }

Wichtige Eigenschaften von Relationen

Sei R eine Relation über A.

(1) R heißt reflexiv falls

für jedes $x \in A$ gilt xRx.

(2) R heißt symmetrisch falls

für alle $x, y \in A$ aus xRy stets folgt yRx.

(3) R heißt antisymmetrisch falls

für alle $x, y \in A$ aus xRy und yRx stets folgt $x = y$.

(4) R heißt transitiv falls

für alle $x, y, z \in A$ aus xRy und yRz stets folgt xRz.

(5) R heißt nacheindeutig falls

für alle $x, y, z \in A$ aus xRy und xRz stets folgt $y = z$.

Wichtige Eigenschaften von Relationen

Bemerkung:

“antisymmetrisch” nicht gleichbedeutend mit “nicht symmetrisch”!

R antisymmetrisch: $\forall x, y : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y.$

R symmetrisch: $\forall x, y : (xRy \Rightarrow yRx)$

R nicht symmetrisch: $\exists x, y : (xRy \wedge \neg(yRx))$

Wichtige Eigenschaften von Relationen

Satz: Sei R eine Relation über M.

(1)	R reflexiv	genau dann, wenn	$\Delta_M \subseteq R$.
(2)	R symmetrisch	genau dann, wenn	$R^{-1} \subseteq R$
		genau dann, wenn	$R^{-1} = R$
(3)	R transitiv	genau dann, wenn	$R \circ R \subseteq R$
(4)	R antisymmetrisch	genau dann, wenn	$R \cap R^{-1} = \Delta_M$

Wichtige Eigenschaften von Relationen

Sei R eine Relation über M, und sei P eine Eigenschaft.

Die Relation R^* heißt Abschluss von R bezüglich P wenn:

(1) R^* besitzt die Eigenschaft P

(2) $R \subseteq R^*$

(3) R^* ist die kleinste Menge die (1) und (2) erfüllt:

für alle Relationen S, so dass

S besitzt die Eigenschaft P, und

$R \subseteq S$

gilt $R^* \subseteq S$.