Universität des Saarlandes
Dr. René Beier
Dr. Bodo Manthey

Sommersemester 2006
Übungen zur Vorlesung
„Optimierung“
Abgabe: 04.05.2006

2. Übung

0. Falls Sie es noch nicht getan haben:
   (a) Melden Sie sich für die Vorlesung an.
   (b) Tragen Sie sich in die Mailing-Liste ein.

---

1. (10 Punkte) Finden Sie alle Basislösungen zu der Standardform des folgenden LPs (siehe auch 1. Übung, Aufgaben 1 und 2):

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & x_1 + 3x_2 \\ \text{unter den Bedingungen} & x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ & x_2 \geq 1, \\ & -x_1 + 2x_2 \geq -2 \quad \text{und} \\ & 5x_1 - x_2 \geq -5. \end{array}$$

   Welche Basislösungen sind BFS?

2. (10 Punkte) Zeigen Sie, wie n Variablen, die auch negative Werte annehmen dürfen, durch $n+1$ Variablen ersetzt werden können, die keine negativen Werte annehmen dürfen.

3. (20 Punkte) Zeigen Sie, dass lösbare LPs immer optimale Basislösungen besitzen. Modifizieren Sie dazu den Beweis von Satz 2.17.

   Sie dürfen annehmen, dass die Annahmen 2.11 und 2.16 erfüllt sind. Nehmen Sie zusätzlich an, dass F beschränkt ist, es also eine Zahl $M \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $F \subseteq \{x \mid x \geq 0 \text{ und } x \leq M\}$ gilt. ($x \leq M$ ist wieder komponentenweise gemeint.)

   (a) Zeigen Sie, dass Annahme 2.19 aus der Zusatzannahme $F \subseteq \{x \mid x \geq 0 \text{ und } x \leq M\}$ folgt.
   (b) Warum kann θ aus dem Beweis von Satz 2.17 nicht beliebig groß gewählt werden?
   (c) Sei θ' minimal, so dass $x_j + \theta' y_j \geq 0$ und $x_t - \theta' \geq 0$ ist.
   Zeigen Sie, dass $\theta' < 0$ ist.
   Warum kann θ' nicht beliebig klein gewählt werden?

(d) Sei $\tilde{x}$ definiert wie im Beweis von Satz 2.17, und sei $\tilde{x}'$ analog definiert durch

$$\tilde{x}'_j = \begin{cases} x_t - \theta' & \text{für } j = t, \\ x_j - \theta' y_j & \text{für } j < t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die bessere der beiden Lösungen $\tilde{x}$ und $\tilde{x}'$ nicht größere Kosten hat als x.

(e) Zeigen Sie, dass es eine optimale Basislösung gibt, falls das LP lösbar ist.