Universität des Saarlandes
Dr. René Beier
Dr. Bodo Manthey

Sommersemester 2006
Übungen zur Vorlesung
„Optimierung“
Abgabe: 11.05.2006

3. Übung

1. (10 Punkte) Sei F die Menge aller $x = (x_1, \ldots, x_5)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^5$, die

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und $x \geq 0$ erfüllen.

Konstruieren Sie die Abbildung zwischen Punkten aus F und Punkten des zugehörigen Polytops P.

(a) Formen Sie die Gleichungen so um, dass sich x_3, x_4 und x_5 aus x_1 und x_2 ergeben.

(b) Zeichnen Sie das zugehörige 2-dimensionale Polytop P.

(c) Geben Sie die zwei Abbildungen $\widehat{\ }: F \to P$, $x \mapsto \hat{x}$ und $\widehat{\ }^{-1} : P \to F$, $\hat{x} \mapsto H\hat{x} + g = x$ an.

(d) Sei $c = (-1, 2, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ ein Kostenvektor. Geben Sie mit Hilfe der Abbildung $\widehat{\ }^{-1}$ die Kosten eines Punktes $\hat{x} \in P$ in der Form $d^{\mathrm{T}}\hat{x} + e$ an. an.

(e) Sei nun P ein beliebiges konvexes Polytop und F die Lösungsmenge des zugehörigen LPs. Seien $c^{\mathrm{T}}x$ die Kosten von $x \in F$, $x = H\hat{x} + g$ und $d^{\mathrm{T}}\hat{x} + e$ die Kosten von $\hat{x}$.

Beweisen Sie: Seien $x, x' \in F$. Dann gilt $c^{\mathrm{T}}x \leq c^{\mathrm{T}}x'$ genau dann, wenn $d^{\mathrm{T}}\hat{x} \leq d^{\mathrm{T}}\hat{x}'$ ist. (Auf den konstanten Term e kann verzichtet werden.)

2. (20 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Beim Bilden der Standardform ist eine unbeschränkte Variable x_j durch zwei Variablen $x_j - x_{j'}$ mit $x_j, x_{j'} \geq 0$ ersetzt worden.

Keine Basis enthält sowohl j als auch j'.

(b) Falls keine Basislösung degeneriert ist, so ist die optimale Lösung eindeutig bestimmt, falls das LP lösbar ist.

(c) Für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\operatorname{rank}(A) = m$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gilt: Das Ungleichungssystem $Ax \geq b$ besitzt eine Lösung.

(d) Für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\operatorname{rank}(A) < m$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gilt: Das Ungleichungssystem $Ax \geq b$ besitzt eine Lösung.

(e) Für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\operatorname{rank}(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gilt: Lässt sich c^{T} als Linearkombination der Zeilen $a_1, \ldots, a_m$ von A darstellen, dann ist das LP „minimiere $c^{\mathrm{T}}x$ unter der Bedingung $Ax \geq b$“ lösbar.

3. (10 Punkte) Gegeben sei folgendes LP:

$$
\begin{array}{llr}
\text{Minimiere} & -x_1 - 3x_2 & \\
\text{unter den Bedingungen} & x_1 + x_2 + x_3 = & 5, \\
& 2x_1 - x_2 - x_4 = & -1, \\
& x_2 + x_5 = & 2 \quad \text{und} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq & 0.
\end{array}
$$

Finden Sie eine optimale Lösung des LPs, indem Sie das zugehörige Tableau aufstellen. Starten Sie mit der Basis $\langle 3, 4, 5 \rangle$.