Universität des Saarlandes
Dr. René Beier
Dr. Bodo Manthey

Sommersemester 2006
Übungen zur Vorlesung
„Optimierung“
Abgabe: 18.05.2006

4. Übung

1. (10 Punkte)

   (a) Sei $F \in \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $c \in \mathbb{R}^n$ ein Kostenvektor.
   Ein Vektor $x^\star \in F$ heißt *lokales Minimum*, falls es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $c^\mathrm{T} x^\star \leq c^\mathrm{T} x$ für alle $x \in F \cap U_\epsilon(x^\star)$ ist. Hierbei bezeichnet $U_\epsilon(x^\star) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^\star\|_2 < \epsilon\}$ eine ϵ-Umgebung um $x^\star$ und $\|x - x^\star\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^\star)^2}$ die Euklidische Norm.
   Ein Vektor $x^\star \in F$ heißt *globales Minimum*, falls $c^\mathrm{T} x^\star \leq c^\mathrm{T} x$ für alle $x \in F$ ist.
   Beweisen Sie, dass alle lokalen Minima auch globale Minima sind.

   (b) Sei nun $c : F \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, d.h. für alle $x, y \in F$ und $\lambda \in [0,1]$ ist $c(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda c(x) + (1-\lambda)c(y)$.
   Zeigen Sie, dass dann ebenfalls alle lokalen Minima auch globale Minima sind.

2. (10 Punkte) Zeigen Sie, dass der Simplex-Algorithmus nicht unbedingt terminiert. Benutzen Sie dazu folgende Pivot-Regel:

   (i) Wähle $p \notin B$ mit minimalem $\overline{c}_p$.

   (ii) Falls $\theta = \frac{T[q,0]}{T[q,p]}$ und $T[q,p] > 0$ von mehreren q erfüllt wird, wähle dass kleinste q. (Achtung: Das kleinste q ist nicht unbedingt die linkeste Spalte unter den Spalten k_q mit $\theta = \frac{T[q,0]}{T[q,p]}$.)

   Starten Sie mit folgendem Tableau:

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc} 3 & -\frac{3}{4} & 20 & -\frac{1}{2} & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

3. (10 Punkte) Gegeben sei ein LP „minimiere $c^\mathrm{T} x$ mit $Ax = b$“ ohne weitere Einschränkungen an x. Hierbei ist $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ und $c \in \mathbb{Z}^n$. Außerdem ist $\mathrm{rank}(A) = m$.

   (a) Zeigen Sie: Gibt es ein $\pi \in \mathbb{R}^m$ mit $\pi^\mathrm{T} A = c^\mathrm{T}$, dann ist das LP lösbar und alle Lösungen sind optimal.

(b) Zeigen Sie: Gibt es kein $\pi \in \mathbb{R}^m$ mit $\pi^{\mathrm{T}} A = c^{\mathrm{T}}$, dann ist das LP unbeschränkt.

4. (15 Punkte) Führen Sie den Simplex-Algorithmus mit Blands Pivot-Regel an folgendem Beispiel durch:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & x_1 + x_2 & \\
\text{unter den Bedingungen} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{und} \\
 & x \geq 0. &
\end{array}
$$

Das Beispiel entspricht dem Beispiel 2.D aus der Vorlesung bis auf die vierte Bedingung und die Kostenfunktion.