Universität des Saarlandes
Dr. René Beier
Dr. Bodo Manthey

Sommersemester 2006
Übungen zur Vorlesung
„Optimierung“
Abgabe: 26.05.2006

5. Übung

1. (30 Punkte) Ziel ist es, das Kürzeste-Wege-Problem (KWP) als LP zu formulieren.

   Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$ und $w_e \in \mathbb{N}$ $(e \in E)$ Kantengewichte. Sie können davon ausgehen, dass s keine eingehenden und t keine ausgehenden Kanten besitzt.

   Um das KWP als LP zu formulieren, stellen wir uns einen Einheitsfluss $f = (f_e)_{e \in E}$ vor, der auf einem kürzestem Weg von s nach t fließen soll. An allen Knoten außer s und t muss Flusserhaltung gelten.

   Damit ergibt sich das ILP

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimiere} & \sum_{e \in E} f_e w_e \\
\text{unter den Bedingungen} & \\
\sum_{u \in V:(u,v) \in E} f_{(u,v)} - \sum_{x \in V:(v,x) \in E} f_{(v,x)} = 0 & \text{für alle } v \in V \setminus \{s, t\}, \\
\sum_{x \in V:(s,x) \in E} f_{(s,x)} = 1, & \\
\sum_{u \in V:(u,t) \in E} f_{(u,t)} = 1, & \\
f \in \{0, 1\}. &
\end{array}
$$

   (a) Sei $F = \{e \in E \mid f_e = 1\}$. Beweisen Sie, dass f genau dann eine zulässige Lösung des ILP ist, wenn t von s aus über Kanten aus F erreichbar ist.

   (b) Geben Sie ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür an, wann das ILP unlösbar ist.

   (c) Sei f eine Lösung des ILPs und ℓ die Länge eines kürzesten Weges von s nach t. Beweisen Sie: Ist $\sum_{e \in E} f_e w_e = \ell$, dann enthält F einen kürzesten Weg von s nach t.

       Gilt die Umkehrung auch?

   (d) Zeigen Sie, dass die Bedingung $\sum_{u \in V:(u,t) \in E} f_{(u,t)} = -1$ redundant ist, d.h. dass sie sich bereits aus den anderen Bedingungen ergibt.

   Wir ersetzen die Bedingung $f_e \in \{0, 1\}$ durch $0 \leq f_e \leq 1$ und erhalten so ein LP. Das Ziel ist es, zu zeigen, dass das LP eine ganzzahlige optimale Lösung besitzt. Sei dazu f eine nicht-ganzzahlige Lösung des LP und $R = \{e \in E \mid f_e \in (0, 1)\}$ die Menge der Kanten e, für die f_e nicht ganzzahlig ist.

(e) Zeigen Sie, dass der Graph (V, R) einen Zyklus enthält, wobei Kanten sowohl vorwärts, als auch rückwärts verwendet werden können.

(f) Verwenden Sie Aufgabe (1e), um zu zeigen, dass das LP eine ganzzahlige optimale Lösung besitzt.

2. (20 Punkte) Sei $M = \{a_i, \ldots, a_m\}$ mit $a_i \in \mathbb{R}^n$ für $i \in [m]$. Der *Kegel (cone)* von M ist die Menge $C(M)$ der Vektoren, die sich als Linearkombination der Vektoren aus M mit positiven Koeffizienten schreiben lassen:

$$C(M) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \pi_1, \ldots, \pi_m \geq 0 : x = \sum_{i=1}^{m} \pi_i a_i\big\}.$$

Farkas' Lemma besagt: Sei $c \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $c \in C(M)$ genau dann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle Vektoren $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^{\mathrm{T}} a_i \geq 0$ für alle $i \in [m]$, ist auch $y^{\mathrm{T}} c \geq 0$.

(a) Zeigen Sie die eine Richtung von Farkas' Lemma: Sei $c \in C(M)$. Dann folgt aus $y^{\mathrm{T}} a_i \geq 0$ für alle $i \in [m]$, dass auch $y^{\mathrm{T}} c \geq 0$ ist.

(b) Zeigen Sie die andere Richtung von Farkas' Lemma: Sei $c \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor, so dass aus $a_i^{\mathrm{T}} y \geq 0$ für alle $i \in [m]$ auch $c^{\mathrm{T}} y \geq 0$ folgt. Dann ist $c \in C(M)$. (Hinweis: Untersuchen Sie das LP „minimiere $c^{\mathrm{T}} y$ unter den Bedingungen $a_i^{\mathrm{T}} y \geq 0$ für $i \in [m]$ und das dazu duale LP.)

Um zu zeigen, dass ein LP eine Lösung besitzt, genügt es, eine zulässige Lösung x anzugeben. Der Vektor x ist ein Zertifikat für die Lösbarkeit des LP. Mit Farkas' Lemma erhält man auch Zertifikate für die Unlösbarkeit von LPs.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Farkas' Lemma, dass $Ax = b, x \geq 0$ genau dann unlösbar ist, wenn es ein π gibt mit $\pi^{\mathrm{T}} A \geq 0$ und $\pi^{\mathrm{T}} b < 0$.

3. (20 Zusatzpunkte) Beweisen Sie Satz 3.6 aus der Vorlesung.