Universität des Saarlandes
Dr. René Beier
Dr. Bodo Manthey

Sommersemester 2006
Übungen zur Vorlesung
„Optimierung“
Abgabe: 16.06.2006

7. Übung

1. (30 Punkte) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $m = |V|$ Knoten und $n = |E|$ Kanten. Sei $A = (a_{v,e})_{v \in V, e \in E}$ mit

$$a_{v,e} = \begin{cases} +1 & \text{falls } e = (v, \cdot) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } e = (\cdot, v) \text{ ist und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die zugehörige Inzidenzmatrix. Mit $A_e = (a_{v,e})_{v \in V}$ bezeichnen wir die zur Kante $e \in E$ gehörende Spalte und mit $a_v = (a_{v,e})_{e \in E}$ die zum Knoten $v \in V$ gehörende Zeile von A.

   (a) Sei G zusammenhängend. (Ein gerichteter Graph ist zusammenhängend, wenn es für jedes Paar u und v von Knoten einen Weg von u nach v gibt, wobei Kanten auch rückwärts benutzt werden dürfen.)

   Beweisen Sie, dass $\mathrm{rank}(A) = m - 1$ ist.

   Hinweise: Sie können Aufgabe 1(d) der 5. Übung verwenden, um zu zeigen, dass $\mathrm{rank}(A) \leq m - 1$ ist. Um $\mathrm{rank}(A) \geq m - 1$ zu zeigen, wählen Sie $m - 1$ Kanten $E' = \{e_1, \ldots, e_{m-1}\}$ aus, so dass bereits $G' = (V, E')$ zusammenhängend ist. G' ist also ein (gerichteter) Baum. Zeigen Sie dann, dass die Spalten $A_{e_1}, \ldots, A_{e_{m-1}}$ linear unabhängig sind. Nutzen Sie dazu aus, dass G' Blätter besitzt.

   (b) Verallgemeinern Sie Teil (a): Sei d die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G. Dann ist $\mathrm{rank}(A) = m - d$.

   Seien nun $s, t \in V$ und A' die $((m-1) \times n)$-Matrix, die wir aus A durch Streichen der Zeile a_t erhalten. Im Folgenden sei G zusammenhängend. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass jede BFS des Kürzesten-Wege-Problems einen Pfad von s nach t repräsentiert.

   Sei $d = (d_v)_{v \in V \setminus \{t\}} \in \{0, 1\}^{m-1}$ mit $d_s = 1$ und $d_v = 0$ für alle $v \in V \setminus \{s, t\}$. Das LP der Aufgabe 1 der 5. Übung kann wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & w^{\mathrm{T}} f \\ \text{unter den Bedingungen} & A' f = d \quad \text{und} \\ & f \geq 0. \end{array}$$

   Beachten Sie, dass die Bedingung $f \leq 1$ weggelassen wurde.

   Da die Spalten von A' den Kanten von G entsprechen, kann jede Basis als $(m-1)$-elementige Teilmenge von E aufgefasst werden.

(c) Zeigen Sie: Sei $B = \{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq E$. Enthält der Graph (V, B) einen Zyklus, wobei auch Kanten rückwärts verwendet werden dürfen, dann sind die Spalten $A'_{e_1}, \ldots, A'_{e_k}$ linear abhängig.

(d) Zeigen Sie: Ist $B \subseteq E$ eine Basis, dann ist $|B| = m - 1$ und (V, B) ein gerichteter Baum.

(e) Sei $B \subseteq E$ eine Basis und f_B die zugehörige BFS des Kürzesten-Wege-Problems.

Zeigen Sie, dass die Kanten der Menge $E_B = \{e \mid (f_B)_e > 0\}$ einen einfachen Pfad von s nach t bildet, der alle Kanten aus E_B in der richtigen Richtung durchläuft. (Ein einfacher Pfad ist ein Pfad, der keinen Knoten mehrfach besucht.) Zeigen Sie außerdem, dass $(f_B)_e \in \{0, 1\}$ für alle $e \in E$ ist.

(f) Sei nun umgekehrt $(e_1, \ldots, e_k)$ mit $e_j = (v_{j-1}, v_j) \in E$, $v_0 = s$ und $v_k = t$ ein einfacher Pfad von s nach t. Zeigen Sie, dass f mit

$$f_e = \begin{cases} 1 & \text{falls } e = e_j \text{ für ein } j \in [k] \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine BFS ist, indem Sie eine zu f passende Basis angeben.