I N F O R M A T I K

Universität des Saarlandes

Dr. Rene Beier, Dr. Bodo Manthey **SS 2006**

Übungen zu Optimierung

http://www.mpi-sb.mpg.de/~opt06

Übung 10 Abgabe: 6.7.2006

Aufgabe 1 (*Charakerisierung von volldimensionalen Polyedern, 15 Punkte*)
Wir betrachten das Polyeder definiert durch

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\},$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Wir nehmen an, dass P beschränkt ist und keine Zeile von A der Nullvektor ist. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) Das Polyeder P hat positives Volumen.

b) Es existiert ein Punkt $x \in P$, so dass $Ax > b$.

c) Es gibt $n+1$ Extrempunkte von P, die nicht auf einer gemeinsamen Hyperebene liegen.

Aufgabe 2 (*Minimaler-Schnitt-Problem, 15 Punkte*)
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, $s, t \in V$, $s \neq t$ zwei spezielle Knoten und $w : E \to \mathbb{R}$ eine Gewichtsfunktion auf der Kantenmenge. Gesucht ist eine Menge C von Kanten mit minimalen Gewicht, so dass jeder Pfad von s nach t mindestens eine Kante aus C enthält (C ist ein Schnitt in G). Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller $s, t-$Pfade. Man kann dieses Problem folgendermaßen als LP formulieren:

$$\begin{array}{ll} \text{minimiere} & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{unter den Bed.} & \sum_{e \in K} x_e \geq 1 \quad \forall K \in \mathcal{K} \\ & 0 \leq x_e \leq 1, \quad \forall e \in E. \end{array}$$

Es stellt sich heraus, dass die Knoten des zugehörigen Polyeders Vektoren mit nur ganzzahligen Einträgen sind. Eine optimale BFS entspricht einem minimalen Schnitt. Beweisen Sie, dass das zugehörige Separationsproblem in Polynomialzeit gelöst werden kann.

Aufgabe 3 (*Bitkomplexität der Multiplikation, 10 Punkte*)
Gegeben sind 2 ganze Zahlen a und b der Länge ℓ_a und ℓ_b in Binärdarstellung. Wie lange dauert

das Multiplizieren von a und b nach der Schulmethode unter dem Modell der Bitkomplexität. Als Grundoperationen, die in konstanter Zeit durchgeführt werden können, stehen die Addition und Multiplikation von einzelnen Bits zur Verfügung. Bei der Addition kann man annehmen, dass die Operation 3 Operanden hat: 2 Bits (die Summanden) und ein zusätzliches Übertragsbit, welches in die Summe mit einfließt. Das Ergebnis sind entsprechend 2 Bits. Geben Sie die Anzahl der Grundoperationen in Anhängigkeit von ℓ_a und ℓ_b an.