

Übungen zu Optimierung

<http://www.mpi-sb.mpg.de/~opt06>

Übung 11

Abgabe: 13.7.2006

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Es wurden in der Vorlesung zwei verschiedene ILP-Formulierungen für das Problem des Handlungsreisenden vorgestellt. Subtour-Formulierung:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{e \in E} c_e x_e \\
 \text{u.d.B.} \quad & \sum_{e \in \delta(\{v\})} x_e = 2 \quad \forall v \in V \\
 & \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset, V \\
 & x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E
 \end{aligned}$$

Cutset-Formulierung:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{e \in E} c_e x_e \\
 \text{u.d.B.} \quad & \sum_{e \in \delta(\{v\})} x_e = 2 \quad \forall v \in V \\
 & \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset, V \\
 & x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E
 \end{aligned}$$

Seien P_{SUB} und P_{CUT} die Polyeder, die durch die Relaxation des Subtour-ILPs bzw. des Cutset-ILPs beschrieben werden. Zeigen Sie, dass $P_{\text{SUB}} = P_{\text{CUT}}$ gilt!

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Eine Intervall-Matrix hat nur 0-1 Einträge und jede Zeile ist von der Form:

$$(0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 0 \dots 0).$$

Die Einseinträge in jeder Zeile folgen also direkt nacheinander und bilden somit einen Block. Zeigen Sie, dass Intervallmatrizen total unimodular sind.

Hinweis: Sei A eine Intervallmatrix, B eine quadratische Submatrix von A und sei

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Was ist $\det(N)$? Zeigen Sie dass NB^T die Submatrix einer Inzidenzmatrix ist.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle Matrizen A die folgenden Aussagen gelten:

a) A ist genau dann total unimodular wenn $[A|I]$ total unimodular ist.

b) A ist genau dann total unimodular wenn $\begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{bmatrix}$ total unimodular ist.

c) A ist genau dann total unimodular wenn A^T total unimodular ist.