32 Boolesche Algebren

32.1 Motivation

- Ring- und Körperdefinition beschreiben nicht die einzigen sinnvollen Möglichkeiten, wie zwei Verknüpfungen auf derselben Menge zusammenwirken können.
  - Operationen auf Mengen: Vereinigung $\cup$, Durchschnitt $\cap$, Komplementbildung $\complement$ (vgl. MfI 1, Kap. 1)
  - Operationen auf logischen Ausdrücken: Disjunktion (ODER) $\vee$, Konjunktion (UND) $\wedge$, Negation (NICHT) $\neg$ (vgl. MfI 1, Kap. 2)

  Beide Beispiele folgen ähnlichen Gesetzen.
- Liegt eine gemeinsame algebraische Struktur vor?
- Gibt es weitere wichtige Beispiele hierfür?

32.2 Definition

Eine Menge M bildet mit zwei algebraischen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sowie einer einstelligen Operation $\neg$ (einer Abbildung von M in M) eine **boolesche Algebra** $(M, +, \cdot, \neg)$, wenn gilt:

a) *Kommutativgesetze:*

$$\left.\begin{array}{c} a+b=b+a \\ a\cdot b=b\cdot a \end{array}\right\} \quad \forall a,b\in M$$

b) *Assoziativgesetze:*

$$\left.\begin{array}{c} (a+b)+c=a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \end{array}\right\} \quad \forall a,b,c\in M$$

c) *Distributivgesetze:*

$$\left.\begin{array}{c} a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c) \\ a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c) \end{array}\right\} \quad \forall a,b,c\in M$$

d) *Neutrale Elemente:* Es gibt Elemente $0 \in M$ (Nullelement) und $1 \in M$ (Einselement) mit

$$\left.\begin{aligned} 0 + a &= a \\ 1 \cdot a &= a \end{aligned}\right\} \quad \forall a \in M$$

e) *Komplementäre Elemente:*

$$\left.\begin{aligned} a + (\neg a) &= 1 \\ a \cdot (\neg a) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall a \in M$$

Wir nennen $\neg a$ das zu a **komplementäre Element.**

32.3 Beispiel 1: Operationen auf Mengen

Es sei M eine Menge, $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge (also die Menge aller Teilmengen von M) und $\complement$ die Komplementbildung. Dann ist $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, \complement)$ eine boolesche Algebra mit $\emptyset$ als Nullelement und M als Einselement:

a) Vereinigung und Durchschnittsbildung von Mengen sind kommutativ und assoziativ (vgl. MfI 1, 1.6).

b) Vereinigung und Durchschnittsbildung von Mengen erfüllen die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

für alle Mengen A, B, C (vgl. MfI 1, 1.6).

c) Es gilt (beachte: $A \in \mathcal{P}(M)$ bedeutet dasselbe wie $A \subset M$!)

$$\begin{aligned} \emptyset \cup A &= A \qquad \forall A \subset M \\ M \cap A &= A \qquad \forall A \subset M \end{aligned}$$

d) Für $A \subset M$ und $\complement A := \bar{A} := M \setminus A$ gilt

$$\begin{aligned} A \cup \bar{A} &= M \\ A \cap \bar{A} &= \emptyset\ . \end{aligned}$$

32.4 Aussagenlogik

Aussagen: Sätze (in natürlicher oder formalisierter Sprache), denen eindeutig einer der Wahrheitswerte wahr (1) oder falsch (0) zugeordnet werden kann (vgl. MfI 1, 2.3)

ODER-Verknüpfung (Disjunktion): Sind A und B zwei Aussagen, so ist $A \vee B$ (A ODER B) eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn wenigstens eine der Aussagen A und B wahr ist, ansonsten falsch.

UND-Verknüpfung (Konjunktion): Sind A und B zwei Aussagen, so ist $A \wedge B$ (A UND B) eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn sowohl A als auch B wahr ist, ansonsten falsch.

Negation: Ist A eine Aussage, so ist $\neg A$ eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

Die Menge aller Aussagen bildet zusammen mit den Operationen $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ eine boolesche Algebra. Die logische Konstante falsch stellt darin das Nullelement dar, die Konstante wahr das Einselement.

a) Kommutativität, Assoziativität und Distributivgesetze gelten (vgl. MfI 1, 2.8)

b) Neutrale Elemente:

$$0 \vee A = A\,, \qquad 1 \wedge A = A \qquad \forall A$$

c) Komplementäre Elemente:

$$\begin{aligned} A \vee \neg A &= 1 && \text{(Satz vom ausgeschlossenen Dritten)} \\ A \wedge \neg A &= 0 && \text{(Satz vom Widerspruch)} \end{aligned}$$

(Konvention: $\neg$ hat höhere Priorität als $\vee$ und $\wedge$ / vgl. MfI 1, 2.8)

32.5 Satz: Einige Eigenschaften boolescher Algebren

Es sei $(M, +, \cdot, \neg)$ eine boolesche Algebra. Dann gilt:

a)
$$\left.\begin{aligned} a &= a + a \\ a &= a \cdot a \end{aligned}\right\} \quad \forall a \in M$$

b) $\neg(\neg a) = a \quad \forall a \in M$

c) Regeln von de Morgan:
$$\left.\begin{aligned} \neg(a + b) &= (\neg a) \cdot (\neg b) \\ \neg(a \cdot b) &= (\neg a) + (\neg b) \end{aligned}\right\} \quad \forall a, b \in M$$

Man kann sich leicht einen Überblick über alle endlichen booleschen Algebren verschaffen:

32.6 Satz: Endliche boolesche Algebren

a) Jede endliche boolesche Algebra ist isomorph zur booleschen Algebra der Teilmengen einer endlichen Menge.

b) Endliche boolesche Algebren haben immer 2^n Elemente mit einem $n \in \mathbb{N}$.

c) Zwei endliche boolesche Algebren mit der gleichen Anzahl an Elementen sind isomorph.