# D: Lineare Algebra

## 33 Vektorräume

### 33.1 Motivation

- Im $\mathbb{R}^2$ (Ebene) und $\mathbb{R}^3$ (Raum) kann man Vektoren addieren und mit einem Skalar multiplizieren.
- Ziel: Grundkonzepte algebraisch formalisieren, um sie auch auf andere Situationen anwenden zu können
- Anwendungen z. B. in der Codierungstheorie, Robotik, Computergrafik, Computer Vision

### 33.2 Definition

Es sei $K$ ein Körper. Ein $K$**-Vektorraum** ist eine Menge $V$, auf der eine Verknüpfung $+ : V \times V \to V$ und eine **skalare Multiplikation** $\cdot : K \times V \to V$ definiert sind mit

a) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

b) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \qquad \forall \lambda, \mu \in K,\ \forall v \in V$

c) $1 \cdot v = v \qquad \forall v \in V$

d) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad \forall \lambda \in K,\ \forall v, w \in V$

e) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \qquad \forall \lambda, \mu \in K,\ \forall v \in V.$

Die Elemente von $V$ heißen **Vektoren,** die Elemente von $K$ heißen **Skalare.** Das neutrale Element der Gruppe $(V, +)$ heißt **Nullvektor** $\vec{0}$. Ist $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, so sprechen wir von einem **reellen** bzw. **komplexen Vektorraum.**

*Bemerkung:* Für Skalare verwenden wir meist kleine griechische Buchstaben wie $\lambda, \mu, \nu$. Vektoren bezeichnen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben wie $u, v, w$. Nur wenn Verwechslungsgefahr besteht, verwenden wir Pfeile, z. B. wenn es erforderlich ist, den Nullvektor $\vec{0} \in V$ von der skalaren Null $0 \in K$ zu unterscheiden.

## 33.3 Satz: Rechenregeln für Vektorräume

In einem $K$-Vektorraum $V$ gilt

a) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \forall \lambda \in K$

b) $0 \cdot v = \vec{0} \quad \forall v \in V$

c) $(-1) \cdot v = -v \quad \forall v \in V$

**Beweis von (a):**

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \vec{0} &= \lambda \cdot (\vec{0} + \vec{0}) && \text{(wegen } \vec{0} = \vec{0} + \vec{0}\text{)} \\ &= \lambda \cdot \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0} && \text{(wegen 33.2e)} \end{aligned}$$

Addition von $-\lambda \cdot \vec{0}$ auf beiden Seiten ergibt die Behauptung. □

## 33.4 Beispiele

a) Die Menge

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \;\middle|\; u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}.$$

b) $\mathbb{C}^n$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum für jedes $n \in \mathbb{N}$.

c) Ist $K$ ein Körper, so ist $K^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $K$-Vektorraum.

d) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

e) Spezialfall von (c): $\mathbb{Z}_2^n$ ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$. Er besteht aus allen $n$-Tupeln von Nullen und Einsen.

Beispielsweise lassen sich `integer`-Werte in Binärdarstellung als Elemente des Vektorraums $\mathbb{Z}_2^{32}$ interpretieren. (Welche Operation wird dabei durch die Vektorraumaddition realisiert?)

Die Vektorräume $\mathbb{Z}_2^n$ spielen eine große Rolle in der Codierungstheorie. Lineare Codes verwenden Teilmengen des $\mathbb{Z}_2^n$, bei denen beim Auftreten eines Übertragungsfehlers mit hoher Wahrscheinlichkeit ein Element außerhalb der Teilmenge entsteht (vgl. 31.16).

f) Funktionenräume sind wichtige Vektorräume. Definiert man auf $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ eine Vektoraddition und eine skalare Multiplikation durch

$$\left.\begin{array}{r}(f+g)(x) := f(x) + g(x)\\ (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)\end{array}\right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}\ ,$$

so ist $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Der Nullvektor ist dabei durch $f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ gegebene Funktion.

g) Die Polynome $K[x]$ über einem Körper $K$ bilden einen $K$-Vektorraum, wenn man als skalare Multiplikation definiert

$$\lambda \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k x^k := \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) x^k \qquad \forall \lambda \in K\ .$$

Zu Gruppen und Ringen haben wir Untergruppen und Unterringe definiert (vgl. **??**, 30.5). Ähnliches ist auch für Vektorräume möglich.

## 33.5 Definition: Untervektorraum

Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $U \subset V$. Ist $U$ mit den Verknüpfungen von $V$ selbst wieder ein $K$-Vektorraum, so heißt $U$ **Unterraum** (**Untervektorraum**, **Teilraum**) von $V$.

## 33.6 Satz: Unterraumkriterium

Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $U \subset V$ nichtleer. Dann ist $U$ genau dann ein Vektorraum (also ein Unterraum von $V$), wenn gelten

a) $u + v \in U \quad \forall u, v \in U$ und

b) $\lambda u \in U \quad \forall \lambda \in K \;\; \forall u \in U$.

**Beweis:**

a) $U$ Unterraum $\Rightarrow$ (a), (b): nach Definition.

b) (a), (b) $\Rightarrow U$ Unterraum:

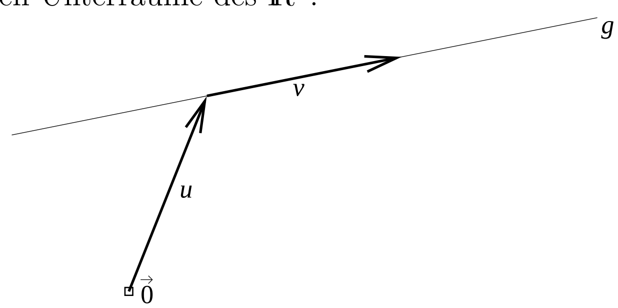
- Nach **??** ist $(U, +)$ Untergruppe von $(V, +)$, da $U$ abgeschlossen unter $+$ und nach 33.3c und 33.3bzu $u \in U$ auch $-u = (-1) \cdot u \in U$ gilt.
- Da $(V, +)$ kommutativ, ist auch $(U, +)$ kommutativ.
- Wegen 33.6b ist $\cdot$ eine Abbildung von $K \times U$ nach $U$. Die Eigenschaften b–e der Vektorraumdefinition 33.2 übertragen sich von $V$ auf $U$. □

## 33.7 Beispiele

a) Ein $K$-Vektorraum $V$ hat die trivialen Unterräume $\{0\}$ und $V$.

b) Lineare Codes sind Unterräume im $\mathbb{Z}_2^n$.

c) Sind Geraden Unterräume des $\mathbb{R}^2$?




Eine Gerade ist gegeben durch

$$\{u + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}\,, \quad u, v \in \mathbb{R}^2\,, v \neq 0\,.$$

Ein Unterraum muss stets den Nullvektor enthalten. Damit sind nur Ursprungsgeraden $\{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, Unterräume.

d) Verallgemeinerung von (c): In einem $K$-Vektorraum $V$ bilden die Mengen $\{\lambda v \mid \lambda \in K\}$ Unterräume.

Das letzte Beispiel lässt sich noch weiter verallgemeinern.

## 33.8 Definition

Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Ferner seien $u_1, \dots, u_n \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Dann nennt man

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$$

eine **Linearkombination** von $u_1, \dots, u_n$.

Die Menge aller Linearkombinationen bildet das **Erzeugnis** $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_n)$. Man nennt $\{u_1, \dots, u_n\}$ das **Erzeugendensystem** von $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_n)$.

## 33.9 Satz: Erzeugnis als Unterraum

Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum, und es seien $u_1, \dots, u_n \in V$. Dann bildet $\operatorname{span}(u_1, \dots, u_n)$ einen Unterraum von $V$.

**Beweis:** Wir wenden das Unterraumkriterium an.

a) Es seien $v, w \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n)$. Dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ mit

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \ , \qquad\qquad w = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k \ .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} v + w &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k + \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\lambda_k + \mu_k)}_{\in K} u_k \qquad\qquad \text{(nach 33.2a, e)} \\ &\in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_n) \ . \end{aligned}$$

b) Es sei $\mu \in K$ und $v \in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_n)$. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\mu v &= \mu \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k u_k}_{\in V} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mu(\lambda_k u_k) && \text{(nach 33.2d)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\mu\lambda_k)}_{\in K} u_k && \text{(nach 33.2b)} \\
&\in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_n)\ .
\end{aligned}$$

□

## 33.10 Beispiel

Im $\mathbb{R}^3$ bildet jede Ebene durch den Ursprung

$$\{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}\ , \qquad v, w \in \mathbb{R}^3\ , \quad v, w \neq \vec{0}\ , \quad v \neq \nu w\ \forall \nu \in \mathbb{R}$$

einen Unterraum.

Wie in $\mathbb{R}^2$ bilden auch in $\mathbb{R}^3$ Geraden durch den Ursprung

$$\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}\ , \quad v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

Unterräume.

## 33.11 Lineare Abhängigkeit

Offenbar ist

$$\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\mathbb{R}^3=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right),$$

d. h. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ lässt sich als Linearkombination von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ darstellen.

**Definition:** Ein Vektor $u$ heißt **linear abhängig** von $v_1, \ldots, v_n$, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gibt mit

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \ .$$

Eine Menge von Vektoren $u_1, \ldots, u_n$, bei denen sich keiner der Vektoren als Linearkombination der anderen ausdrücken lässt, heißt **linear unabhängig.**

Gibt es ein einfaches Kriterium, anhand dessen man lineare Unabhängigkeit nachweisen kann?

## 33.12 Satz: Kriterium für lineare Unabhängigkeit

Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für jede Linearkombination mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}$ gilt

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \ .$$

**Beweis:** „$\Leftarrow$“: Es seien $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig, d. h. es gibt ein $v_k$ mit $v_k = \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} \lambda_i v_i$. Setzt man $\lambda_k := -1$, so folgt $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.

„⇒“: Angenommen, es gibt eine Linearkombination, in der ein $\lambda_k \neq 0$ existiert und $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \vec{0}$ gilt. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
-\lambda_k v_k &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i v_i \\
v_k &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \underbrace{\frac{-\lambda_i}{\lambda_k}}_{\in K} v_i \ ,
\end{aligned}
$$

d. h. $v_k$ ist linear abhängig von $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_k\}$. □

Ist lineare Unabhängigkeit auch bei unendlich vielen Vektoren ein sinnvoller Begriff?

## 33.13 Definition

Ein unendliches System $B$ von Vektoren heißt **linear unabhängig,** wenn jede endliche Auswahl von Vektoren aus $B$ linear unabhängig ist.

## 33.14 Beispiel

Betrachte $\mathbb{R}[x]$. Nach 33.4g ist $\mathbb{R}[x]$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Wir zeigen, dass das unendliche System $B = \{1, x, x^2, \ldots\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}[x]$ ist.

Angenommen, dies trifft nicht zu. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $\{x^{m_1}, x^{m_2}, \ldots, x^{m_n}\} \subset B$, die linear abhängig ist. Folglich gibt es eine Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{m_i} = 0 \qquad (*)$$

mit einem $\lambda \neq 0$.

Auf der linken Seite von $(*)$ steht ein Polynom, das nur endlich viele Nullstellen hat (vgl. Satz 31.7); rechts steht das Nullpolynom mit unendlich vielen Nullstellen – Widerspruch! □

Der Begriff der linearen Unabhängigkeit gestattet uns, ein minimales Erzeugendensystem zu finden.

## 33.15 Definition

Es sei $V$ ein Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subset V$ heißt **Basis** von $V$, falls gilt:

a) $\operatorname{span}(B) = V$.

b) $B$ ist linear unabhängig.

## 33.16 Beispiele

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$, denn

   i) Es sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen $\lambda, \mu$ mit

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

   Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\lambda + 3\mu &= x \\ 3\lambda + 4\mu &= y \end{aligned}$$

   hat die Lösung

$$\lambda = -4x + 3y \, , \qquad \mu = 3x - 2y \, . \tag{$*$}$$

   Daraus folgt $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

   ii) Es sei

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   Mit $(*)$ folgt $\lambda = -4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$, $\mu = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$. Dabei ist $\lambda = \mu = 0$ die einzige Lösung dieses Systems.

Also sind $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ linear unabhängig.
*Bem.:* Die Eindeutigkeit der Lösung wird in späteren Kapiteln genauer untersucht.

b) $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$, die so genannte **Standardbasis.**

c) Es gibt auch Vektorräume mit unendlichen Basen. Beispielsweise ist $\{1, x, x^2, \dots\}$ eine unendliche Basis des $\mathbb{R}[x]$:

   i) $\{1, x, x^2, \dots\}$ ist linear unabhängig nach 33.14.

   ii) Jedes Polynom aus $\mathbb{R}[x]$ ist als Linearkombination von Elementen aus $\{1, x, x^2, \dots\}$ darstellbar.

Hat jeder Vektorraum eine Basis? Man kann zeigen:

## 33.17 Satz: Existenz von Basen

Jeder Vektorraum $V \neq \{\vec{0}\}$ besitzt eine Basis.

Offenbar sind Basen nicht eindeutig: So sind z. B. $\left\{ \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ Basen des $\mathbb{R}^2$. Insbesondere kann man Basisvektoren austauschen:

## 33.18 Satz: Austauschsatz

Es sei $V$ ein Vektorraum mit einer endlichen Basis $B := \{b_1, \dots, b_n\}$. Außerdem sei $v \in V$, $v \neq 0$. Dann existiert ein $b_k$, für das $\{b_1, \dots, b_{k-1}, v, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ eine Basis von $V$ ist.

**Beweis:** Da $B$ Basis ist, gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \; . \qquad (*)$$

Da $v \neq 0$, ist dabei mindestens ein $\lambda_i \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit sei $\lambda_1 \neq 0$. Wir zeigen, dass dann $\{v, b_2, \ldots, b_n\}$ eine Basis von $V$ ist.

i) Es gilt $\operatorname{span}(v, b_2, \ldots, b_n) = V$: Es sei nämlich $u \in V$. Da $B$ Basis ist, gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_n$ mit

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i \; . \qquad (**)$$

Aus $(*)$ und $\lambda_1 \neq 0$ folgt

$$b_1 = \frac{1}{\lambda_1} v - \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} b_i \; .$$

Einsetzen in $(**)$ zeigt, dass $u$ als Linearkombination von $v, b_2, \ldots, b_n$ geschrieben werden kann.

ii) Das System $\{v, b_2, \ldots, b_n\}$ ist linear unabhängig: Es sei nämlich $\mu_1 v + \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_n b_n = 0$. Mit $(*)$ erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i + \sum_{i=2}^{n} \mu_i b_i \\ &= \mu_1 \lambda_1 b_1 + \sum_{i=2}^{n} (\mu_1 \lambda_i + \mu_i) b_i \; . \end{aligned}$$

Da $\{b_1, \ldots, b_n\}$ Basis ist, sind alle Koeffizienten 0:

$$\begin{aligned} \mu_1 \lambda_1 = 0 \quad &\overset{\lambda_1 \neq 0}{\Rightarrow} \quad \mu_1 = 0 \\ \mu_1 \lambda_i + \mu_i = 0 \quad &\overset{\mu_1 = 0}{\Rightarrow} \quad \mu_i = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

□

Hat ein Vektorraum eine eindeutig bestimmte Anzahl von Basisvektoren?

## 33.19 Satz: Eindeutigkeit der Anzahl von Basisvektoren

Hat ein Vektorraum $V$ eine endliche Basis von $n$ Vektoren, so besteht jede Basis von $V$ aus genau $n$ Vektoren.

**Beweis:** Es seien $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ und $C := \{c_1, \dots, c_m\}$ Basen von $V$.

i) Angenommen, es wäre $n > m$. Nach Satz 33.18 kann man $m$ der Vektoren von $B$ durch $C$ austauschen:

$$\{c_1, \dots, c_m, b'_{m+1}, \dots, b'_n\} \qquad \text{mit } \{b'_{m+1}, \dots, b'_n\} \subset \{b_1, \dots, b_n\} \ .$$

Da $C$ eine Basis ist, sind die nicht ausgetauschten Vektoren $b'_{m+1}, \dots, b'_n$ aus $B$ als Linearkombinationen von $c_1, \dots, c_m$ darstellbar. Dies widerspricht der Basiseigenschaft.

ii) $n < m$ wird analog zum Widerspruch geführt. $\square$

## 33.20 Definition: Dimension eines Vektorraums

Es sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraums $V$. Dann heißt die Zahl $n =: \dim V$ die **Dimension** von $V$. Für den Nullraum $\{\vec{0}\}$ definiert man $\dim\{\vec{0}\} := 0$.

## 33.21 Satz: Basiskriterium

In einem Vektorraum $V$ der Dimension $n$

- ist jede linear unabhängige Menge von $n$ Vektoren eine Basis.
- bilden $n$ Vektoren, die $V$ erzeugen, stets eine Basis.

*Bemerkung:* In einem $n$-dimensionalen Vektorraum gibt es keine linear unabhängigen Systeme von mehr als $n$ Vektoren.