34 Lineare Abbildungen

34.1 Motivation

- Wir haben wichtige Eigenschaften von Vektorräumen kennen gelernt. Damit ist es sinnvoll zu untersuchen, wie Abbildungen zwischen Vektorräumen aussehen können. Die wichtigsten Abbildungen zwischen Vektorräumen sind lineare Abbildungen.
- Der Basisbegriff bildet ein wichtiges Werkzeug zur Beschreibung linearer Abbildungen.

34.2 Definition

Es seien U, V zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt **lineare Abbildung (Vektorraumhomomorphismus),** wenn gilt:

a) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ für alle $u, v \in U$

b) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ für alle $\lambda \in K$, $u \in U$.

U und V heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive lineare Abbildung $f : U \to V$ gibt. Wir schreiben hierfür $U \simeq V$.

Bemerkung: Die Begriffsbildung ist ähnlich wie bei Gruppen (vgl. 29.20): Ein Vektorraumhomomorphismus überführt die Verknüpfungen in U (Addition, skalare Multiplikation) in die Verknüpfungen in V.

Man fasst oft (a) und (b) in eine Bedingung zusammen:
$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall u, v \in U$, d. h. Linearkombinationen in U werden in solche in V überführt.

34.3 Beispiele

a) Die Abbildung

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

ist linear, denn

$$
\begin{aligned}
f\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu y_1\\\lambda x_2+\mu y_2\\\lambda x_3+\mu y_3\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}2(\lambda x_1+\mu y_1)+(\lambda x_3+\mu y_3)\\-(\lambda x_2+\mu y_2)\end{pmatrix}\\
&= \lambda\begin{pmatrix}2x_1+x_3\\-x_2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2y_1+y_3\\-y_2\end{pmatrix}\\
&= \lambda f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right)+\mu f\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

für alle $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto x+1$ ist keine lineare Abbildung, denn $1 = f(0+0) \neq f(0)+f(0) = 1+1$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1\\x_1x_2\end{pmatrix}$ ist ebenfalls nicht linear, da

$$
f\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\ ,\quad 2\cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\ .
$$

34.4 Weitere Begriffe

Analog zu 29.20 definiert man auch für Vektorräume **Monomorphismen, Epimorphismen, Isomorphismen, Endomorphismen** und **Automorphismen**.

In Analogie zu 29.22 ist für einen Homomorphismus $f : U \to V$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &:= \{f(u) \mid u \in U\} && \text{das } \textbf{Bild} \text{ von } f,\\
\mathrm{Ker}(f) &:= \{u \in U \mid f(u) = 0\} && \text{der } \textbf{Kern} \text{ von } f.
\end{aligned}
$$

34.5 Satz: Eigenschaften linearer Abbildungen

a) Ist $f : U \to V$ ein Isomorphismus, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ linear.

b) Die lineare Abbildung $f : U \to V$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ ist.

c) Ist $f : U \to V$ linear, so ist $\mathrm{Ker}(f)$ ein Unterraum von U und $\mathrm{Im}(f)$ ein Unterraum von V.

d) Es gilt $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim U$.

34.6 Beispiel

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\ , \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 = x_3 \right\}$ ist eine Ebene durch den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ (und somit ein zweidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^3$).

$\mathrm{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ ist eine Gerade durch den Ursprung in $\mathbb{R}^2$ (und somit ein eindimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^2$).

Es ist $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Weiteres Beispiel: Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aus 34.3a. Man überzeugt sich davon, dass $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$, $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$.

Welche Rolle spielen Basen bei der Beschreibung linearer Abbildungen? Hierzu betrachten wir zunächst Basisdarstellungen von Vektoren.

34.7 Satz: Eindeutigkeit der Darstellung in einer festen Basis

Es sei $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine geordnete Basis des K-Vektorraums V. Dann gibt es zu jedem Vektor $v \in V$ eindeutig bestimmte Elemente $x_1, \dots, x_n \in K$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \ .$$

Diese x_i heißen **Koordinaten** von v bezüglich B. Wir schreiben

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B \ .$$

Beweis: Die Existenz der Darstellung ist klar wegen $V = \operatorname{span}(B)$. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit. Es sei

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \quad \text{und} \quad v = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i \ .$$

Dann ist

$$\vec{0} = v - v = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) b_i \ ,$$

wegen der linearen Unabhängigkeit von B also

$$x_i = y_i \ , \qquad i = 1, \dots, n \ .$$

□

Bemerkung: Die Abbildung, die jeden Vektor v auf seinen Koordinatenvektor abbildet, ist ein Isomorphismus von V nach K^n.

Selbstverständlich liefern unterschiedliche Basen auch unterschiedliche Koordinatendarstellungen eines Vektors. Wie kann man diese Darstellungen ineinander umrechnen?

34.8 Beispiel: Umrechnung von Koordinatendarstellungen

Im $\mathbb{R}^2$ sei eine Basis $B = \{b_1, b_2\}$ gegeben. Bezüglich B habe ein Vektor v die Darstellung $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$.

Wir betrachten die neue Basis $C = \{c_1, c_2\}$ mit $c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$, $c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B$. Wie lautet die Darstellung von v bezüglich C?

Ansatz: $v = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}_C$. Es muss gelten

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = v = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}_C &= \lambda c_1 + \mu c_2 \\ = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B &= \begin{pmatrix} 2\lambda + \mu \\ 2\lambda + 2\mu \end{pmatrix}_B . \end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} 2\lambda + \mu &= x \\ 2\lambda + 2\mu &= y \end{aligned}$$

haben die Lösung

$$\lambda = x - \frac{1}{2} y , \qquad \mu = -x + y .$$

Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 5 - \frac{1}{2} 2 \\ -5 + 2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}_C .$$

Auf diese Weise kann man allgemein die Koordinatendarstellung von Vektoren bezüglich einer Basis B in eine solche bezüglich einer anderen Basis C umrechnen, wenn nur für die Basisvektoren von C die Darstellungen bezüglich der Basis B bekannt sind.

Basen ermöglichen es, eine lineare Abbildung durch wenige Daten zu beschreiben: Es genügt, zu wissen, was mit den Basisvektoren passiert.

34.9 Satz: Charakterisierung einer linearen Abbildung durch ihre Wirkung auf die Basis

Es seien U, V zwei K-Vektorräume und $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von U. Außerdem seien $v_1, \dots, v_n \in V$.

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : U \to V$ mit $f(b_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Beweis: Es sei $u \in U$ und $u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$. Wir setzen $f(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$.

Man prüft nach:

- f ist eine lineare Abbildung: Für $u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ und $w = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$, $\lambda, \mu \in K$ ist

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu w) &= f\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i b_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i b_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) b_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) v_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \\ &= \lambda f(u) + \mu f(w) \ . \end{aligned}$$

- $f(b_i) = v_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass g eine weitere lineare Abbildung mit $g(b_i) = v_i$ für $i = 1, \dots, n$ ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} g(u) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) \overset{\text{linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i g(b_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(b_i) \overset{\text{linear}}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) = f(u) \ . \end{aligned}$$

□

Eine weitere wichtige Aussage, die mithilfe von Basen bewiesen werden kann, bezieht sich auf isomorphe Vektorräume.

34.10 Satz: Isomorphie endlichdimensionaler Vektorräume

Es seien U, V zwei endlichdimensionale K-Vektorräume. Dann sind U und V genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben:

$$U \simeq V \quad \Leftrightarrow \quad \dim U = \dim V \ .$$

Bemerkung: Dieser Satz besagt z. B., dass es im Wesentlichen nur einen einzigen n-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ gibt: den $\mathbb{R}^n$.

Beweisskizze: Man zeigt:

a) Ein Isomorphismus zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen bildet Basen auf Basen ab.

b) Eine lineare Abbildung zweier Vektorräume gleicher endlicher Dimension, die eine Basis auf eine Basis abbildet, ist ein Isomorphismus. □