36 Rang einer Matrix

36.1 Motivation

- Interpretiert man eine Matrix als lineare Abbildung, so haben die Spaltenvektoren eine besondere Bedeutung: Nach Def. 35.3 sind sie die Bilder der Basisvektoren.
- Wir wollen die lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit dieser Spaltenvektoren genauer untersuchen. Dies führt unter anderem zu einem wichtigen Kriterium für die Invertierbarkeit von Matrizen.

36.2 Definition

Der **Spaltenrang (Rang)** einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A. Man schreibt dafür $\operatorname{rang} A$ (auch rank, rk).

36.3 Satz: Aussagen über den Rang einer Matrix

Es sei $f : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung mit der zugehörigen Matrix $A \in K^{m \times n}$ und den Spaltenvektoren $a_{*1}, \dots, a_{*n}$. Dann gilt:

a) $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{span}(a_{*1}, \dots, a_{*n})$

b) $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rang} A$

c) $\dim \operatorname{Ker}(f) = n - \operatorname{rang} A$

Beweis:

a) „$\supset$" ist klar, da $a_{*1}, \dots, a_{*n}$ die Bilder der Basisvektoren sind.

„$\subset$": Es ist

$$f(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 a_{*1} + \ldots + x_n a_{*n} \ ,$$

d. h. jedes Element des Bildes ist Linearkombination der Spaltenvektoren.

b) Folgt unmittelbar aus (a).

c) Folgt aus Satz 34.5d. $\square$

36.4 Beispiele

a) Nach 35.14d ist $A \in K^{n\times n}$ genau dann invertierbar, wenn $\operatorname{rang} A = n$ ist.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat den Rang 3: Es ist $a_{*2}, a_{*3} \notin \operatorname{span}(a_{*1})$, $a_{*3} \notin \operatorname{span}(a_{*1}, a_{*2})$.
Man beachte, dass sich aufgrund der speziellen Gestalt von A (obere Dreiecksmatrix) der Rang besonders leicht ablesen lässt.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat den Rang 2: Die Vektoren a_{*1}, a_{*2} sind linear unabhängig, und $a_{*3} = a_{*1} + 2a_{*2}$.

36.5 Definition: transponierte Matrix

Vertauscht man bei einer Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ die Rolle von Zeilen und Spalten, so entsteht die **transponierte Matrix** $A^{\mathrm{T}} = (a_{ji}) \in K^{n\times m}$.

Der Rang von A^{T} gibt die Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren von A an. Man nennt ihn daher auch den **Zeilenrang** von A.

36.6 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =: B$$

rang $A = 2$: a_{*1}, a_{*2} sind linear unabhängig
$a_{*3} = a_{*1} + 2a_{*2}$
$a_{*4} = 2a_{*1} + a_{*2}$

rang $B = 2$: b_{*1}, b_{*2} sind linear unabhängig
$b_{*3} = 2b_{*1}$

In diesem Beispiel stimmen also Spalten- und Zeilenrang überein. Ist dies Zufall?

36.7 Satz: Gleichheit von Spaltenrang und Zeilenrang

Für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ sind Spalten- und Zeilenrang gleich.

Beweis: Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben. Bezeichnen wir ihren Spaltenrang mit r, so lassen sich die Spaltenvektoren $a_{*1}, \dots, a_{*n}$ als Linearkombinationen von r Basisvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1m} \end{pmatrix}, \dots, b_r = \begin{pmatrix} b_{r1} \\ \vdots \\ b_{rm} \end{pmatrix}$$

darstellen:

$$\begin{aligned} a_{*1} &= c_{11} b_1 + \dots + c_{1r} b_r \\ &\vdots \\ a_{*n} &= c_{n1} b_1 + \dots + c_{nr} b_r \end{aligned} \qquad (*)$$

Also haben wir für jedes einzelne Matrixelement von A

$$a_{ij} = c_{j1} b_{1i} + \dots + c_{jr} b_{ri} \; .$$

Für die Elemente eines Zeilenvektors a_{i*} von A haben wir damit

$$\begin{aligned} a_{i1} &= c_{11} b_{1i} + \dots + c_{1r} b_{ri} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_{in} = c_{n1}b_{1i} + \ldots + c_{nr}b_{ri}$$

das heißt, der Zeilenvektor lässt sich als Linearkombination der r Zeilenvektoren $c_j := (c_{1j}, \ldots, c_{nj})$, $j = 1, \ldots, r$ darstellen:

$$a_{i*} = b_{1i}c_1 + \ldots + b_{ri}c_r \ .$$

Wir haben also aus den *Koeffizienten* der Linearkombinationen $(*)$ einen Satz von *Erzeugenden* $c_1, \ldots, c_r$ für die Zeilenvektoren von A erhalten, wobei die *Basisvektoren* aus $(*)$ zu *Koeffizienten* geworden sind.

Wegen $\dim \operatorname{span}(c_1, \ldots, c_r) \leq r$ folgt für den Zeilenrang von A, dass $\operatorname{rang} A^{\mathrm{T}} \leq r$, also $\operatorname{rang} A^{\mathrm{T}} \leq \operatorname{rang} A$.

Ganz analog beweist man auch $\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} A^{\mathrm{T}}$, und die Behauptung folgt. □

36.8 Bemerkungen

a) Man prüft leicht nach, dass $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

b) Man schreibt (Spalten-) Vektoren gern platzsparend als transponierte Zeilenvektoren, z. B. $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ als $(4, 0, 1, 2)^{\mathrm{T}}$.

36.9 Folgerung: Links- und Rechtsinversion

Ist eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ invertierbar, so gilt für ihre Inverse A^{-1} auch

$$A^{-1}A = I \ .$$

Beweis: A ist invertierbar genau dann, wenn $\operatorname{rang} A = n$. Wegen 36.7 ist dies genau dann der Fall, wenn $\operatorname{rang} A^{\mathrm{T}} = n$. Dies gilt genau dann, wenn auch A^{T} invertierbar ist.

Angenommen, A und A^{T} sind invertierbar mit

$$A^{-1} =: B \ , \qquad\qquad (A^{\mathrm{T}})^{-1} =: C \ ,$$

also

$$AB = I \ , \qquad\qquad\qquad A^{\mathrm{T}}C = I \ .$$

Daraus folgt $C^{\mathrm{T}}A = I$ und damit

$$C^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}(AB) = (C^{\mathrm{T}}A)B = B \ .$$

Also gilt auch $BA = I$. $\square$