37 Gauß-Algorithmus und lineare Gleichungssysteme

37.1 Motivation

- Lineare Gleichungssysteme treten in einer Vielzahl von Anwendungen auf und müssen gelöst werden.
- In Abschnitt 35.5 haben wir gesehen, dass Matrizen zur kompakten Notation linearer Gleichungssysteme benutzt werden können:

  Die Gleichheit $Ax = b$ (A Matrix, x, b Vektoren) verkörpert die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \ . \end{aligned}$$

- Wir betrachten den Fall $m = n$. Vorausgesetzt, A ist eine invertierbare Matrix (vgl. 35.11–35.14), dann erhalten wir durch Multiplikation mit A^{-1} auf der linken Seite (vgl. auch Satz 36.9) den Vektor x, d. h. inverse Matrizen spielen eine Rolle im Zusammenhang mit der Lösung linearer Gleichungssysteme.

  Aus 36.4a kennen wir den Zusammenhang zwischen Rang und Invertierbarkeit: Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\operatorname{rang} A = n$.

Aus diesen Gründen ist es von Interesse, ein Verfahren zur Hand zu haben, das

- den Rang einer Matrix ermittelt
- die Inverse (sofern existent) berechnet

sowie unter geeigneten Voraussetzungen

- lineare Gleichungssysteme löst.

Dies alles leistet der **Gauß-Algorithmus.**

37.2 Idee

In Beispiel 36.4b wurde eine obere Dreiecksmatrix $\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ betrachtet, die auf der Diagonalen nur von 0 verschiedene Einträge hatte. Allgemein hat eine $n \times n$-Matrix mit dieser Eigenschaft stets den Rang n.

Die Idee des Gauß-Algorithmus besteht darin, eine beliebige Matrix in eine solche Dreiecksmatrix (oder eine ähnliche Form) umzuwandeln, und zwar auf eine Weise, die sicher stellt, dass sich der Rang der Matrix dabei nicht ändert.

37.3 Definition: Elementare Zeilenumformungen

Die folgenden Operationen auf Matrizen heißen **elementare Zeilenumformungen:**

a) Vertauschen zweier Zeilen,

b) Addition des λ-fachen ($\lambda \in K$) der Zeile a_{j*} zur Zeile a_{i*},

c) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$.

37.4 Satz

Bei elementaren Zeilenumformungen bleibt der Rang einer Matrix stets erhalten.

Beweis:

a) offensichtlich, da $\operatorname{span}(a_{1*}, \ldots, a_{m*})$ bei Vertauschung zweier Zeilenvektoren unverändert bleibt

b) Wir zeigen $\operatorname{span}(a_{1*}, \ldots, a_{i*}, \ldots, a_{m*}) = \operatorname{span}(a_{1*}, \ldots, a_{i*} + \lambda a_{j*}, \ldots, a_{m*})$.
„$\subset$“: Es sei $v \in \operatorname{span}(a_{1*}, \ldots, a_{i*}, \ldots, a_{m*})$, also

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 a_{1*} + \ldots + \lambda_i a_{i*} + \ldots + \lambda_j a_{j*} + \ldots + \lambda_m a_{m*} \\ &= \lambda_1 a_{1*} + \ldots + \lambda_i (a_{i*} + \lambda a_{j*}) + \ldots + (\lambda_j - \lambda\lambda_i) a_{j*} + \ldots + \lambda_m a_{m*} \end{aligned}$$

$$\in \operatorname{span}(a_{1*}, \ldots, a_{i*} + \lambda a_{j*}, \ldots, a_{j*}, \ldots, a_{m*}) .$$

„$\supset$“ wird analog gezeigt.

c) Analog zu (b). $\square$

37.5 Gauß-Algorithmus

Gegeben sei eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$.

- Betrachte a_{11}.
  - Ist $a_{11} \neq 0$, so subtrahiere von jeder Zeile a_{i*}, $i \geq 2$, das $\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der ersten Zeile. Danach ist a_{11} das einzige von Null verschiedene Element der ersten Spalte.
  - Ist $a_{11} = 0$, aber das erste Element a_{i1} einer anderen Zeile ungleich Null, so vertausche die beiden Zeilen a_{1*} und a_{i*}. Mit der neuen Matrix verfahre wie oben.
  - Sind alle a_{i1}, $i = 1, \ldots, m$, gleich 0, so beachte die erste Spalte nicht weiter und verfahre wie oben mit a_{12} statt a_{11}; sofern auch die 2. Spalte nur Nullen enthält, gehe zur 3. Spalte usf.

  Im Ergebnis dieses 1. Schrittes erhalten wir eine Matrix

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ \hline 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \end{array}\right)$$

  (evtl. mit zusätzlichen Nullspalten links).

- Nun wird die erste Zeile und Spalte nicht mehr weiter betrachtet und auf die verbleibende Teilmatrix

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

dasselbe Verfahren angewendet. Damit wird A' umgewandelt in

$$A'' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} & \dots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} \end{pmatrix}$$

- Danach betrachtet man die wiederum um eine Zeile und (mindestens) eine Spalte verkleinerte Teilmatrix usw., bis die gesamte Matrix auf eine Form A^* wie die folgende gebracht ist:

$$A^* = \begin{pmatrix} a & * & * & * & * & \dots & * \\ 0 & b & * & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & c & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

($*$ steht jeweils für beliebige Werte; $a, b, c, d \neq 0$).

In dieser Matrix heißt der erste von 0 verschiedene Eintrag einer Zeile (a, b, c, d) **Leitkoeffizient.** Im gesamten Bereich unterhalb und links eines

Leitkoeffizienten enthält die Matrix nur Nullen:

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & b & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{c} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Eine solche Matrix heißt **Matrix in Zeilen-Stufen-Form.**

Gauß-Algorithmus als rekursive Funktion (Aufruf: Gauss(1,1)):

Gauss (i,j):
- falls $i = m$ oder $j > n$:
  - Ende
- falls $a_{ij} = 0$:
  - suche $a_{kj} \neq 0$, $k > i$; wenn dies nicht existiert:
    - Gauss (i, $j+1$)
    - Ende
  - vertausche Zeile i mit Zeile k
- für alle $k > i$:
  - subtrahiere $\frac{a_{kj}}{a_{ij}} \cdot$ Zeile i von Zeile k $\qquad (*)$
- Gauss ($i+1$, $j+1$)
- Ende.

Das Matrixelement a_{ij}, das in der Zeile $(*)$ als Nenner auftritt, heißt **Pivotelement.**

37.6 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3\times \\ -2\times \end{matrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -4 & -11 & -6 \\ 0 & -4 & -1 & -10 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2\times \\ +1\times \end{matrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -1\times \end{matrix}$$

$$A^* = A''' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

37.7 Satz: Rang einer Matrix in Zeilen-Stufen-Form

Der Rang einer Matrix in Zeilen-Stufen-Form ist gleich der Anzahl ihrer Leitkoeffizienten.

Beweis: Die Anzahl der Leitkoeffizienten sei l.

Jede Zeile, die einen Leitkoeffizienten enthält, ist linear unabhängig von dem System der darunter stehenden Zeilen. Nimmt man also von unten nach oben die linear unabhängigen Zeilen zur Basis hinzu, so folgt, dass

$$\dim \operatorname{span}(a_{1*}, \ldots, a_{m*}) \geq l\ .$$

Andererseits ist auch

$$\dim \operatorname{span}(a_{1*}, \ldots, a_{m*}) \leq l\ ,$$

da es nur l Zeilenvektoren ungleich 0 gibt. $\square$

37.8 Satz: Zeilenumformungen als Matrixmultiplikationen

Jede elementare Zeilenumformung für $m \times n$-Matrizen kann als Multiplikation von links mit einer geeigneten invertierbaren $m \times m$-Matrix ausgedrückt werden:

a) Vertauschung der Zeilen i und j:

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \cdots & & & & 0 \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & \cdots & & & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } i \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

b) Addition von $\lambda \times$ Zeile j zu Zeile i:

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } i \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

c) Multiplikation von Zeile i mit $\lambda \neq 0$:

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \vdots & & & \lambda & & & \vdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(ohne Beweis)

37.9 Umformung einer invertierbaren Matrix zur Einheitsmatrix

Es sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Wegen $\operatorname{rang} A = n$ hat sie die Zeilen-Stufen-Form

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & * & \dots & \dots & * \\ 0 & a'_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a'_{ii} \neq 0,\ i = 1, \dots, n.$$

Multiplikation jeder Zeile a'_{i*} mit $\dfrac{1}{a'_{ii}}$ ergibt eine obere Dreiecksmatrix $A'' = (a''_{ij})$, deren sämtliche Diagonalelemente gleich 1 sind.

Mittels weiterer elementarer Zeilenumformungen wird die Matrix in die Einheitsmatrix umgeformt:

- Subtrahiere für alle $i < n$ das a''_{in}-fache der Zeile n von Zeile i. Danach ist $a''_{nn} = 1$ das einzige Element $\neq 0$ in der letzten Spalte.
- Subtrahiere für alle $i < n-1$ das $a''_{i,n-1}$-fache der Zeile $n-1$ von Zeile i

usw.

37.10 Satz: Berechnung der inversen Matrix

Wird eine invertierbare $n \times n$-Matrix A durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix I umgeformt, so erhält man die Inverse A^{-1}, indem man dieselben Umformungen auf die Einheitsmatrix anwendet.

Beispiel:

$$
\begin{array}{ccl}
A & I & \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ -2\times \\ \qquad -4\times \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ +1\times \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \times(-1) \\ \times(-1) \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ -1\times \quad -2\times \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \\
I & A^{-1} &
\end{array}
$$

Probe:

$$
\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .
$$

Beweis des Satzes: Es seien $D_1, \dots, D_k$ die Matrizen, die gemäß Satz 37.8 die elementaren Zeilenumformungen darstellen, durch die A in I übergeht. Dann ist

$$I = D_k D_{k-1} \dots D_1 A = (D_k D_{k-1} \dots D_1) A$$

und somit

$$A^{-1} = D_k D_{k-1} \dots D_1 = D_k D_{k-1} \dots D_1 I \; .$$

$\square$

Wie kann man den Gauß-Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme verwenden?

37.11 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form

$$Ax = b$$

mit $A \in K^{m \times n}$, $x \in K^n$, $b \in K^m$.

Falls $b \neq 0$, spricht man von einem **inhomogenen** Gleichungssystem. $Ax = 0$ heißt zugehöriges **homogenes** Gleichungssystem.

Die Matrix $(A, b) \in K^{m \times (n+1)}$, d. h. A mit rechts angefügter Spalte b, heißt **erweiterte Matrix** des Systems.

Interpretiert man A als lineare Abbildung, so sind Lösungen des Systems $Ax = b$ gerade die Vektoren, die durch A auf b abgebildet werden.

37.12 Satz: Lösungsverhalten linearer Gleichungssysteme

a) Die Lösungsmenge von $Ax = 0$ ist $\operatorname{Ker} A$ und daher ein Unterraum von K^n.

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

   i) $Ax = b$ hat mindestens eine Lösung.

   ii) $b \in \operatorname{Im} A$.

   iii) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A, b)$.

c) Ist w eine Lösung von $Ax = b$, so ist die vollständige Lösungsmenge gleich $w + \operatorname{Ker} A := \{w + x \mid x \in \operatorname{Ker} A\}$.

Beweis:

a) Klar nach Definition von $\operatorname{Ker} A$.

b) (i)$\Rightarrow$(ii): Existiert eine Lösung w, so gilt $Aw = b$, d. h. $b \in \operatorname{Im} A$.

   (ii)$\Rightarrow$(i): Ist $b \in \operatorname{Im} A$, so ist jedes Urbild w von b Lösung von $Ax = b$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Ist $b \in \operatorname{Im} A$, so ist b Linearkombination der Spalten von A. Damit ist $\operatorname{rang}(A, b) = \operatorname{rang} A$.

(iii)$\Rightarrow$(ii): Ist $\operatorname{rang}(A, b) = \operatorname{rang} A$, so ist b Linearkombination der Spalten von A. Somit ist $b \in \operatorname{Im} A$.

c) „$\subset$“: Es sei $y \in \operatorname{Ker} A$ und w eine Lösung von $Ax = b$. Dann gilt

$$A(w + y) = Aw + Ay = b + 0 = b\ ,$$

d. h. $w + y$ ist Lösung von $Ax = b$. Also ist $w + \operatorname{Ker} A$ in der Lösungsmenge von $Ax = b$ enthalten.

„$\supset$“: Es sei v eine weitere Lösung von $Ax = b$. Dann gilt

$$A(v - w) = Av - Aw = b - b = 0\ ,$$

d. h. $v - w \in \operatorname{Ker} A$ und folglich $v \in w + \operatorname{Ker} A$. Also liegt die Lösungsmenge von $Ax = b$ in $w + \operatorname{Ker} A$. $\square$

37.13 Bemerkungen

a) Ist $\operatorname{rang}(A, b) > \operatorname{rang} A$, so hat $Ax = b$ keine Lösung.

b) Jedes homogene System hat mindestens eine Lösung: 0.

c) Zur Lösung des inhomogenen Systems benötigt man

- die vollständige Lösung des homogenen Systems,
- eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems.

d) Aus (b) und (c) folgt: Besitzt ein inhomogenes System $A\,x = b$ eine Lösung, so ist diese eindeutig, wenn $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ ist.

Um mithilfe des Gauß-Algorithmus das Lösungsverhalten von $Ax = b$ zu studieren, bezeichnen wir mit $\text{Lös}(A, b)$ die Lösungsmenge von $Ax = b$. Wir benötigen zunächst zwei Hilfsaussagen.

37.14 Lemma: Invarianz der Lösungsmenge unter Matrixmultiplikation

Ist $B \in \mathrm{GL}(m, K)$ und $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$, so gilt

$$\mathrm{Lös}(A, b) = \mathrm{Lös}(BA, Bb) \ .$$

Beweis: Ist $x \in \mathrm{Lös}(A, b)$, so gilt $Ax = b$. Damit ist auch $BAx = Bb$, also $x \in \mathrm{Lös}(BA, Bb)$.

Ist umgekehrt $x \in \mathrm{Lös}(BA, Bb)$, so gilt $BAx = Bb$. Da $B \in \mathrm{GL}(m, K)$, existiert ein $B^{-1} \in \mathrm{GL}(m, K)$ nach Satz 35.13. Damit folgt $B^{-1}BAx = B^{-1}Bb$ und somit $Ax = b$, d. h. $x \in \mathrm{Lös}(A, b)$. □

37.15 Satz: Invarianz der Lösungsmenge unter elementaren Zeilenumformungen

Ist die erweiterte Systemmatrix (A', b) aus (A, b) durch elementare Zeilenumformungen entstanden (mit anderen Worten, es wurden die gleichen Zeilenumformungen an A und b vorgenommen), so gilt

$$\mathrm{Lös}(A', b') = \mathrm{Lös}(A, b) \ .$$

Beweisidee: Elementare Zeilenumformungen entsprechen nach 37.8 der Multiplikation mit invertierbaren Matrizen $D_k, D_{k-1}, \dots, D_1$. □

.

Nun können wir zum eigentlichen Ziel kommen.

37.16 Gauß-Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme

Zur Lösung von $Ax = b$ geht man in vier Schritten vor.

i) Schritt 1: Bringe die Matrix (A, b) in Gauß-Jordan-Form (A', b').

Die **Gauß-Jordan-Form** ist eine spezielle Zeilen-Stufen-Form, bei der alle Leitkoeffizienten gleich 1 sind und oberhalb der Leitkoeffizienten nur Nullen stehen.

Enthält in der Gauß-Jordan-Form (A', b') die Spalte b' einen Leitkoeffizienten, so ist $\operatorname{rang}(A', b') > \operatorname{rang} A'$, und das System hat keine Lösung (Ende des Algorithmus). Andernfalls ist $\operatorname{rang}(A', b') = \operatorname{rang} A'$ (Algorithmus fortsetzen).

Beispiel: $(K = \mathbb{R})$

$(A', b') = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$ ist in Gauß-Jordan-Form. Man liest ab: $\operatorname{rang} A' = 4$, $\operatorname{rang}(A', b') = 4$. Es existieren also Lösungen, wir müssen weitermachen.

ii) Schritt 2: Finde die Lösungsmenge U des homogenen Gleichungssystems $A'x = 0$.

Wähle hierzu die Unbekannten, die zu den Spalten ohne Leitkoeffizienten gehören, als freie Parameter.

Beispiel: Im obigen Beispiel setzen wir $x_3 =: \lambda$, $x_6 =: \mu$. Dann hat das homogene System die Lösungsmenge

$$\begin{aligned} x_1 &= -3\lambda - 8\mu \\ x_2 &= -2\lambda - \mu \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= -5\mu \\ x_5 &= -4\mu \\ x_6 &= \mu \end{aligned}$$

oder als Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda - 8\mu \\ -2\lambda - \mu \\ \lambda \\ -5\mu \\ -4\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d. h.

$$U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

iii) Schritt 3: Suche eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A'x = b'$.

Setze hierzu die Unbekannten, die zu den Spalten ohne Leitkoeffizienten gehören, gleich 0 (möglich, da dies freie Parameter sind).

Beispiel: Mit $x_3 = 0$ und $x_6 = 0$ erlaubt die Gauß-Jordan-Form im obigen Beispiel die direkte Bestimmung von

$$x_1 = 2\,, \quad x_2 = 4\,, \quad x_4 = 6\,, \quad x_5 = 0\,,$$

also $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

iv) Schritt 4: Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist dann $w + U$.

Beispiel:

$$\text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

37.17 Geometrische Interpretation linearer Gleichungssysteme

Es sei $A \in K^{m\times n}$, $x \in K^n$, $b \in K^m$. Wir wissen: $\text{Lös}(A, 0) = \operatorname{Ker} A$ ist Unterraum des K^n. (Jedoch ist $\text{Lös}(A, b)$ im Allgemeinen kein Unterraum!)

Für die Dimension von $\text{Lös}(A, 0)$ gilt

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} A}_{\dim \text{Lös}(A,0)} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} A}_{\operatorname{rang} A} = \underbrace{\dim K^n}_{n} ,$$

also

$$\dim \text{Lös}(A, 0) = n - \operatorname{rang} A \ .$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n = 3$, $\operatorname{rang} A = 2 \Rightarrow \dim \text{Lös}(A, 0) = 1$.

$$\text{Lös}(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{Ursprungsgerade}$$

Spezielle Lösung des inhomogenen Systems: $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung:

$$\text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{Gerade}$$