42 Orthogonalität

42.1 Motivation

Im euklidischen Raum ist das euklidische Produkt zweier Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ gleich 0, wenn die Vektoren orthogonal zueinander sind. Für beliebige Vektoren lässt sich sogar der Winkel zwischen ihnen mittels des euklidischen Produktes bestimmen.

Wir wollen die Begriffe der Orthogonalität und des Winkels in allgemeinen Prä-Hilbert-Räumen formulieren.

Dies führt zu Darstellungen in Orthogonalbasen, die wichtige Anwendungen in der Informatik haben, z. B. in der geometrischen Datenverarbeitung, in der Bildverarbeitung und im Information Retrieval.

42.2 Definition: Orthogonalität

Es sei $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum über $\mathbb{R}$. Wir nennen zwei Vektoren $u, v \in V$ orthogonal genau dann, wenn $\langle u, v \rangle = 0$ gilt.

42.3 Beispiel

Wir betrachten $C[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Für $u(x) := x$ und $v(x) := x^2$ erhalten wir

$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0\ .$$

Die Funktionen $u(x) = x$ und $v(x) = x^2$ sind also orthogonal in $C[-1, 1]$.

Satz 40.11 kann unmittelbar auf Prä-Hilbert-Räume verallgemeinert werden.

42.4 Satz des Pythagoras in Prä-Hilbert-Räumen

Es sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum über $\mathbb{R}$ mit der induzierten Norm $\|\cdot\|$. Sind $u, v \in V$ orthogonale Vektoren, so gilt

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \ .$$

Beweis: Es gilt

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0} + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 \ .$$

□

42.5 Beispiel

Nach Beispiel 42.3 sind $u(x) = x$ und $v(x) = x^2$ in $C[-1,1]$ orthogonal. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \int_{-1}^{1} (x+x^2)^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{5} \\
\|u\|^2 &= \int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \\
\|v\|^2 &= \int_{-1}^{1} x^4 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} \ .
\end{aligned}$$

Wie erwartet gilt also $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

42.6 Satz und Definition: Winkel zwischen Vektoren

Es sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum über $\mathbb{R}$ mit der induzierten Norm $\|\cdot\|$. Für zwei Vektoren $u, v \in V \setminus \{0\}$ gibt es dann stets eine eindeutig bestimmte Zahl $\vartheta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos\vartheta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\ \|v\|} \ .$$

Wir bezeichnen ϑ als den **Winkel** zwischen u und v.

Beweis zum Satz:

a) Nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung (Satz 41.5) ist stets

$$\left|\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\ \|v\|}\right| \leq 1 \ ,$$

der Quotient liegt also tatsächlich im Wertebereich der Kosinusfunktion.

b) Die Kosinusfunktion eingeschränkt auf das Intervall $[0, \pi]$ ist eine bijektive Abbildung von $[0, \pi]$ auf $[-1, 1]$. Das sichert die Eindeutigkeit von ϑ im angegebenen Intervall. □

Bemerkung: Für orthogonale Vektoren $u, v \in V \setminus \{0\}$ findet man $\cos\vartheta = 0$, also $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ($\widehat{=}\ 90°$).

42.7 Beispiele

a) **Euklidischer Raum $\mathbb{R}^4$:**
Für die Vektoren $u = (4, 3, 1, -2)^{\mathrm{T}}$ und $v = (-2, 1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ findet man

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= -8 + 3 + 2 - 6 = -9 \\
|u| &= \sqrt{16 + 9 + 1 + 4} = \sqrt{30} \\
|v| &= \sqrt{4 + 1 + 4 + 9} = \sqrt{18} \\
\Rightarrow \quad \cos\vartheta &= \frac{u \cdot v}{|u|\ |v|} = \frac{-9}{\sqrt{30}\sqrt{18}} \approx -0{,}3873 \\
\Rightarrow \quad \vartheta &\approx 1{,}968 \quad (\widehat{=}\ 112{,}8°) \ .
\end{aligned}$$

b) **Funktionenraum $\boldsymbol{C[-1,1]}$** mit Skalarprodukt wie in 42.3:
Für die Funktionen $u(x) = x$ und $v(x) = x^3$ findet man

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \int_{-1}^{1} x^4 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} \\
\|u\| &= \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x} = \sqrt{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \\
\|v\| &= \sqrt{\int_{-1}^{1} x^6 \,\mathrm{d}x} = \sqrt{\left[\frac{1}{7}x^7\right]_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{7}} \\
\Rightarrow \quad \cos\vartheta &= \frac{2/5}{\sqrt{2/3}\sqrt{2/7}} = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0{,}9165 \\
\Rightarrow \quad \vartheta &\approx 0{,}4115 \quad (\widehat{=}\ 23{,}6^\circ)\ .
\end{aligned}$$

Oftmals ist es in Prä-Hilbert-Räumen sinnvoll, Basen zu wählen, deren Elemente paarweise orthogonal sind.

Beispielsweise besteht im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ die Standardbasis

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

aus drei paarweise orthogonalen Vektoren, die außerdem sämtlich die Norm 1 haben.

42.8 Definition: Orthogonalbasis

In einem Prä-Hilbert-Raum heißt eine Menge von Vektoren **orthogonale Menge**, wenn ihre Elemente paarweise orthogonal sind. Haben die Elemente einer orthogonalen Menge außerdem die (induzierte) Norm 1, so spricht man von einer **orthonormalen Menge.**

Ist eine Basis eines Prä-Hilbert-Raumes eine orthogonale [orthonormale] Menge, so heißt sie **Orthogonalbasis [Orthonormalbasis].**

42.9 Beispiel

Die Vektoren $u_1 := (0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $u_2 := (1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $u_3 := (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ bilden eine orthogonale Menge im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, denn es gilt $u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_3 = u_2 \cdot u_3 = 0$.

Sie bilden jedoch keine orthonormale Menge: Zwar ist $|u_1| = 1$, aber $|u_2| = |u_3| = \sqrt{2}$.

Um eine orthonormale Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ zu erhalten, muss man durch die euklidischen Normen dividieren:

$$v_1 := \frac{u_1}{|u_1|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad v_2 := \frac{u_2}{|u_2|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} , \qquad v_3 := \frac{u_2}{|u_2|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

42.10 Satz: Koordinatendarstellung in einer Orthonormalbasis

Es sei $S := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis eines endlichdimensionalen Prä-Hilbert-Raumes $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ über $\mathbb{R}$. Dann gilt für jeden Vektor $u \in V$

$$u = \langle u, v_1 \rangle \, v_1 + \ldots + \langle u, v_n \rangle \, v_n \ .$$

Beweis: Da S Basis ist, gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Daraus folgt für jedes $k = 1, \ldots, n$

$$\langle u, v_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \langle v_i, v_k \rangle \ .$$

Wegen $\langle v_i, v_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq k \\ 1 & \text{falls } i = k \end{cases}$ folgt daraus

$$\langle u, v_k \rangle = \alpha_k \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

□

42.11 Beispiel

Die Vektoren $v_1 := (0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $v_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})^{\mathrm{T}}$, $v_3 = (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})^{\mathrm{T}}$ bilden eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$.

Um $u = (1,2,7)^{\mathrm{T}}$ als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 zu schreiben, berechnet man

$$\begin{aligned} u \cdot v_1 &= 2 \\ u \cdot v_2 &= -\frac{4}{5} + 7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{17}{5} \\ u \cdot v_3 &= \frac{3}{5} + 7 \cdot \frac{4}{5} = \frac{31}{5} \end{aligned}$$

und erhält damit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{17}{5} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \frac{31}{5} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} .$$

42.12 Satz: Koordinatendarstellung in einer Orthogonalbasis

Es sei $S := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthogonalbasis eines endlichdimensionalen Prä-Hilbert-Raumes $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ über $\mathbb{R}$. Dann gilt für jeden Vektor $u \in V$

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \ldots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n \,.$$

Beweis: Aus der Orthogonalbasis S erhält man durch Normierung (d. h. indem alle Basisvektoren durch ihre jeweiligen Normen dividiert werden) die Orthonormalbasis

$$S' = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\} .$$

Nach Satz 42.10 gilt dann

$$\begin{aligned} u &= \left\langle u, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \ldots + \left\langle u, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\rangle \frac{v_n}{\|v_n\|} \\ &= \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \ldots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n \,. \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung: Unter Zusatzvoraussetzungen gelten ähnliche Aussagen auch in unendlichdimensionalen Prä-Hilbert-Räumen.

Um die Basiseigenschaft einer Menge von Vektoren in einem Prä-Hilbert-Raum nachzuweisen, muss unter anderem ihre lineare Unabhängigkeit untersucht werden. Beim Nachweis der Eigenschaft als Orthogonal- oder Orthonormalbasis vereinfacht sich dieser Schritt durch den folgenden Satz.

42.13 Satz: Lineare Unabhängigkeit orthogonaler Mengen

Eine orthogonale Menge $S := \{v_1, \ldots, v_n\}$ aus von 0 verschiedenen Elementen eines Prä-Hilbert-Raumes ist linear unabhängig.

Beweis: Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit müssen wir zeigen, dass aus $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ stets $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ folgt.

Wir nehmen also an, dass $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ gilt. Dann ergibt sich für jedes v_k, $k = 1, \ldots, n$

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle = \alpha_k \|v_k\|^2 \ ,$$

da $\langle v_i, v_k \rangle = 0$ für $i \neq k$ gilt. Wegen $v_k \neq 0$ und daher $\|v_k\| \neq 0$ folgt $\alpha_k = 0$ für jedes k. $\square$

42.14 Beispiele

a) Aus Beispiel 42.9 wissen wir, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

eine orthonormale Menge im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ ist. Nach Satz 42.13 ist sie linear unabhängig. Da die Menge aus drei Vektoren besteht und $\mathbb{R}^3$ die Dimension 3 besitzt, liegt eine Orthonormalbasis vor.

b) Im Raum $C[-1,1]$ aus Beispiel 42.3 (mit dem dort angegebenen Skalarprodukt) betrachten wir den Unterraum aller quadratischen Polynome

$$\{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \ .$$

Die Polynome

$$p_1 := 1 \ , \qquad p_2 := x \ , \qquad p_3 := x^2 - \frac{1}{3}$$

bilden darin eine Orthogonalbasis: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\langle p_1, p_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0 \\
\langle p_1, p_3 \rangle &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x\right]_{-1}^{1} = 0 - 0 = 0 \\
\langle p_2, p_3 \rangle &= \underbrace{\langle x, x^2 \rangle}_{=0 \ (42.3)} - \frac{1}{3} \underbrace{\langle x, 1 \rangle}_{=\langle p_2, p_1 \rangle = 0} = 0 \ ,
\end{aligned}$$

die drei Funktionen sind also paarweise orthogonal. Nach Satz 42.13 sind sie linear unabhängig, und da der Raum der quadratischen Polynome die Dimension 3 besitzt, wird er von $\{p_1, p_2, p_3\}$ auch erzeugt.

Um Satz 42.12 anwenden zu können, berechnen wir noch

$$\begin{aligned}
\|p_1\|^2 &= \langle p_1, p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}x = 2 \\
\|p_2\|^2 &= \langle p_2, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \\
\|p_3\|^2 &= \langle p_3, p_3 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{45} \ .
\end{aligned}$$

Ist nun beispielsweise $q = x^2 + 2x + 1$ gegeben, so berechnen wir

$$\langle q, p_1 \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x + 1) \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

$$
\begin{aligned}
\langle q, p_2 \rangle &= \int\limits_{-1}^{1} (x^3 + 2x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} \\
\langle q, p_3 \rangle &= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^4 + 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{45}\ .
\end{aligned}
$$

Einsetzen in die Gleichung aus Satz 42.12 ergibt die Darstellung

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{4/3}{1}p_1 + \frac{4/3}{2/3}p_2 + \frac{8/45}{8/45}p_3 \\
&= \frac{4}{3}p_1 + 2p_2 + p_3\ .
\end{aligned}
$$

Nach Satz 42.13 sind orthogonale Mengen linear unabhängig. Kann man umgekehrt aus einer linear unabhängigen Menge eine orthogonale Menge konstruieren?

42.15 Orthogonalisierungsalgorithmus von Gram und Schmidt

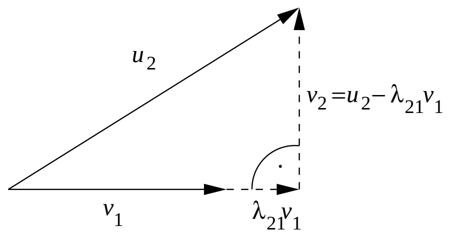
Gegeben:

- Prä-Hilbert-Raum $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$
- endlichdimensionaler Unterraum $W \subset V$
- Basis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ für W

Gesucht: Orthogonalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von W

Schritt 1: $v_1 := u_1$.

Schritt 2: Wir machen den Ansatz $v_2 := u_2 - \lambda_{21} v_1$ und bestimmen λ_{21} so, dass $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ erfüllt ist.



$\lambda_{21} v_1$ ist die Projektion von u_2 auf $\operatorname{span}\{v_1\}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_2, v_1\rangle = \langle u_2 - \lambda_{21} v_1, v_1\rangle \\ &= \langle u_2, v_1\rangle - \lambda_1 \langle v_1, v_1\rangle \end{aligned}$$

ergibt $\lambda_{21} = \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$ und damit

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \ .$$

$\vdots$

Es seien $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ orthogonal, $n \geq 2$.

Schritt n: Der Ansatz

$$v_n := u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni} v_i$$

mit der Forderung

$$\langle v_n, v_j \rangle = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n-1$$

ergibt

$$\begin{aligned} 0 = \langle v_n, v_j \rangle &= \left\langle u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni} v_i, v_j \right\rangle \\ &= \langle u_n, v_j \rangle - \lambda_{nj} \langle v_j, v_j \rangle \end{aligned}$$

und damit $\lambda_j = \dfrac{\langle u_n, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}$ und schließlich

$$v_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i \ .$$

Das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren liefert einen konstruktiven Beweis des folgenden Satzes.

42.16 Satz: Existenz einer Orthogonalbasis

Jeder endlichdimensionale Prä-Hilbert-Raum besitzt eine Orthogonalbasis.

Bemerkung: Eine Orthonormalbasis erhält man durch Normierung.

42.17 Beispiel

Wir wollen aus

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mittels des Gram-Schmidt-Algorithmus eine Orthogonalbasis des euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$ konstruieren. Anschließend soll eine Orthonormalbasis konstruiert werden.

$$
\begin{aligned}
v_1 &= u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\
v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1/3}{2/3} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}
$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ ist die gesuchte Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Die entsprechende Orthonormalbasis $\{w_1, w_2, w_3\}$ lautet

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}/3} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}
$$

Ein weiteres nützliches Ergebnis des Gram-Schmidt-Verfahrens formuliert der folgende Satz.

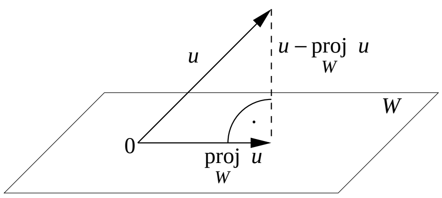
42.18 Satz: Orthogonale Projektion auf Unterräume

Es sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum. Weiter sei $u \in V$, und W sei ein endlichdimensionaler Unterraum von V mit der Orthogonalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Dann beschreibt

$$\operatorname*{proj}_W u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

eine **orthogonale Projektion** von u auf W, d. h. es gilt $\operatorname*{proj}_W u \in W$ und $\left\langle u - \operatorname*{proj}_W u, w \right\rangle = 0$ für alle $w \in W$.



Bemerkung: Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis, gilt

$$\operatorname*{proj}_W u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle \, v_i \ .$$

Ist die Orthogonalprojektion eindeutig?

42.19 Definition: orthogonales Komplement

Es sei W ein Unterraum eines Prä-Hilbert-Raums $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$. Dann wird

$$W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \ \forall w \in W\}$$

als **orthogonales Komplement** von W bezeichnet.

42.20 Satz: Projektionssatz

Es sei W ein endlichdimensionaler Unterraum eines Prä-Hilbert-Raums $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$. Dann besitzt jedes $v \in V$ eine *eindeutige* Darstellung

$$v = w_1 + w_2$$

mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^\perp$.

Beweis: Die Existenz einer solchen Zerlegung folgt aus dem Gram-Schmidt-Algorithmus. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit.

Es seien $w_1, w_1' \in W$ und $w_2, w_2' \in W^\perp$ mit

$$w_1 + w_2 = w_1' + w_2' = v\ .$$

Daraus folgt $w_1 - w_1' = w_2' - w_2$. Da Unterräume abgeschlossen bezüglich der Vektorraumoperationen sind, folgt $w_1 - w_1' \in W$. Andererseits gilt

$$\langle w_2' - w_2, w\rangle = \underbrace{\langle w_2', w\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle w_2, w\rangle}_{=0} \quad \text{für alle } w \in W\ ,$$

d. h. $w_2' - w_2 \in W^\perp$ nach Definition 42.19.

Zugleich gilt wegen $w_2' - w_2 = w_1 - w_1'$ auch $w_2' - w_2 \in W$, also

$$0 = \langle w_2' - w_2, w_2' - w_2\rangle = \|w_2' - w_2\|^2$$

und somit

$$w_2' - w_2 = w_1' - w_1 = 0\ ,$$

also $w_1 = w_1'$, $w_2 = w_2'$. □

Gibt es weitere Anwendungen der Orthogonalprojektion?

42.21 Satz: Approximationssatz

Es sei $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum mit der induzierten Norm $\|\cdot\|$ und W ein endlichdimensionaler Unterraum. Zu jedem $v \in V$ ist dann $\operatorname*{proj}_W v$ die beste Approximation von v in W, d. h.

$$\left\|v - \operatorname*{proj}_W v\right\| < \|v - w\| \quad \text{für alle } w \in W \text{ mit } w \neq \operatorname*{proj}_W v.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\|v-w\|^2 &= \|\underbrace{v-\operatorname*{proj}_W v}_{\in W^\perp}+\underbrace{\operatorname*{proj}_W w-w}_{\in W}\|^2\\
&= \left\|v-\operatorname*{proj}_W v\right\|^2+\left\|\operatorname*{proj}_W w-w\right\|^2 \quad \text{(Satz des Pythagoras)}\\
&\geq \left\|v-\operatorname*{proj}_W v\right\|^2 .
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $w=\operatorname*{proj}_W v$. □

42.22 Beispiel

Wir betrachten $V=C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u,v\rangle := \int_0^{\pi/2} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Wir wollen die Gerade bestimmen, die die Funktion $u(x)=\sin x$ im Intervall $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ bestmöglich (bezüglich der induzierten Norm) approximiert.

Dazu sei $W:=\operatorname{span}\{1,x\}$ der Unterraum aller Geraden ($v_1=1$, $v_2=x$).

Wir suchen $\operatorname*{proj}_W u=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2$ mit

$$0=\langle u-\lambda_1v_1-\lambda_2v_2,v_k\rangle \quad \text{für } k=1,2.$$

In unserem Fall haben wir

$$\begin{aligned}
0&=\langle \sin x-\lambda_1-\lambda_2x,1\rangle\\
0&=\langle \sin x-\lambda_1-\lambda_2x,x\rangle\ ,
\end{aligned}$$

woraus sich das folgende lineare Gleichungssystem für die Unbekannten λ_1 und λ_2 ergibt:

$$\begin{aligned}
\langle 1,1\rangle\,\lambda_1+\langle x,1\rangle\,\lambda_2&=\langle \sin x,1\rangle\\
\langle 1,x\rangle\,\lambda_1+\langle x,x\rangle\,\lambda_2&=\langle \sin x,x\rangle\ .
\end{aligned}$$

Mit

$$
\begin{aligned}
\langle 1,1\rangle &= \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \\
\langle x,1\rangle = \langle 1,x\rangle &= \int\limits_0^{\pi/2} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8} \\
\langle x,x\rangle &= \int\limits_0^{\pi/2} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24} \\
\langle \sin x,1\rangle &= \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 0-(-1) = 1 \\
\langle \sin x,x\rangle &= \int\limits_0^{\pi/2} x\sin x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{2}\cdot 0 + 0\cdot 1 + [\sin x]_0^{\pi/2} = 1
\end{aligned}
$$

lautet dieses System

$$
\begin{pmatrix} \pi/2 & \pi^2/8 \\ \pi^2/8 & \pi^3/24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; .
$$

Es besitzt die Lösung

$$
\lambda_1 = 8\cdot\frac{\pi-3}{\pi^2} \approx 0{,}11\;, \quad \lambda_2 = 24\cdot\frac{4-\pi}{\pi^3} \approx 0{,}66\;.
$$