43 Fourierreihen

43.1 Motivation

Ähnlich wie eine Taylorreihe (vgl. MfI 1, Kap. 20) eine Funktion durch ein Polynom approximiert, wollen wir eine Funktion durch ein trigonometrisches Polynom annähern.

Hierzu verwenden wir den Approximationssatz 42.21.

43.2 Fourierbasis

Gegeben sei der Vektorraum $V = C[0, 2\pi]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle := \int_0^{2\pi} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

und der induzierten Norm $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Wir betrachten den endlichdimensionalen Unterraum

$$W := \operatorname{span}\{1, \cos x, \cos(2x), \ldots, \cos(nx), \sin x, \sin(2x), \ldots, \sin(nx)\}\ .$$

Die Elemente von W nennen wir **trigonometrische Polynome vom Grad $\boldsymbol{\leq n}$.**

Satz: Das System

$$\{1, \cos x, \cos(2x), \ldots, \cos(nx), \sin x, \sin(2x), \ldots, \sin(nx)\}$$

ist eine Orthogonalbasis von W.

Beweis: Nach Definition erzeugt das angegebene System W; zu zeigen ist daher die Orthogonalität (aus der die lineare Unabhängigkeit folgt).

Es gilt für $l, m > 0$

$$\langle 1, \cos(mx)\rangle = \int_0^{2\pi} \cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\langle 1, \sin(mx)\rangle = \int_0^{2\pi} \sin(mx)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\langle \sin(lx), \cos(mx)\rangle = \int_0^{2\pi} \sin(lx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin((l+m)x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin((l-m)x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{2(l+m)}\cos((l+m)x)\right]_0^{2\pi} + \begin{cases} \int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}x\ , & l = m\ , \\ \left[\frac{1}{2(l-m)}\cos((l-m)x)\right]_0^{2\pi}\ , & l \neq m \end{cases}$$

$$= 0$$

$$\langle \cos(lx), \cos(mx)\rangle = \int_0^{2\pi} \cos(lx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((l+m)x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((l-m)x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{2(l+m)}\sin((l+m)x)\right]_0^{2\pi} + \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x\ , & l = m\ , \\ \left[\frac{1}{2(l-m)}\sin((l-m)x)\right]_0^{2\pi}\ , & l \neq m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \pi\ , & l = m\ , \\ 0\ , & l \neq m \end{cases}$$

$$\langle \sin(lx), \sin(mx)\rangle = \int_0^{2\pi} \sin(lx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((l+m)x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((l-m)x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\left[\frac{1}{2(l+m)}\sin((l+m)x)\right]_0^{2\pi} + \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x\,, & l = m\,, \\ \left[\frac{1}{2(l-m)}\sin((l-m)x)\right]_0^{2\pi}\,, & l \neq m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \pi\,, & l = m\,, \\ 0\,, & l \neq m\,. \end{cases}$$

$\square$

Berechnet man noch

$$\langle 1, 1\rangle = \int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi\,,$$

so kennt man auch schon die Nenner für die Anwendung von Satz 42.18 (im Orthogonalbasis-Fall).

43.3 Fourierkoeffizienten

Vektorräume V und $W \subset V$ wie oben; zur Abkürzung setzen wir

$$\begin{array}{lllll} v_0 := 1\,, & v_1 := \cos x\,, & v_2 := \cos(2x)\,, & \ldots & v_n := \cos(nx)\,, \\ & v_{n+1} := \sin x\,, & v_{n+2} := \sin(2x)\,, & \ldots & v_{2n} := \sin(nx)\,. \end{array}$$

Problemstellung: Es sei eine Funktion $u \in V$ gegeben. Gesucht sind die Koeffizienten

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n,$$

für die das trigonometrische Polynom

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

die beste Approximation an $u(x)$ bezüglich der induzierten Norm $\|\cdot\|$ ist („Approximation im quadratischen Mittel“).

Diese Koeffizienten heißen **Fourierkoeffizienten.**

Lösung: Nach Satz 42.21 ist die Approximation im quadratischen Mittel durch die Orthogonalprojektion

$$f = \underset{W}{\mathrm{proj}}\, u$$

gegeben.

Mit der Orthogonalbasis für W nach Satz 43.2 haben wir

$$\begin{aligned}
f = \underset{W}{\mathrm{proj}}\, u &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\langle u, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \langle u, 1 \rangle + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \left(\langle u, \cos(kx) \rangle \cos(kx) + \langle u, \sin(kx) \rangle \sin(kx) \right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \langle u, 1 \rangle &&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x)\,\mathrm{d}x\ , \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \langle u, \cos(kx) \rangle &&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \cos(kx)\,\mathrm{d}x\ , \\
b_k &= \frac{1}{\pi} \langle u, \sin(kx) \rangle &&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \sin(kx)\,\mathrm{d}x\ , \qquad k = 1, \dots, n\ .
\end{aligned}$$

43.4 Beispiel

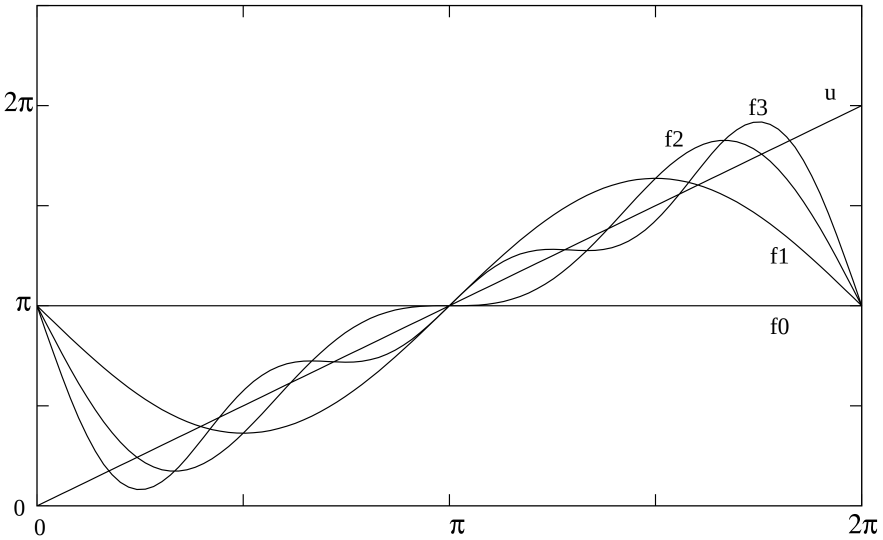
Die Funktion $u(x) = x$ soll auf $[0, 2\pi]$ im quadratischen Mittel durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq n$ approximiert werden.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{x} \right]_0^{2\pi} = 2\pi \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \Bigg(\underbrace{\left[\frac{x}{k} \sin(kx) \right]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{k} \sin(kx)\,\mathrm{d}x \Bigg) \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k^2} \cos(kx) \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (k \geq 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} x \sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{x}{k} \cos(kx) \right]_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{k} \cos(kx)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k^2} \sin(kx) \right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{2}{k} \quad (k \geq 1)
\end{aligned}
$$

Das trigonometrische Approximationspolynom lautet also

$$
f_n(x) = \pi - 2 \left(\sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots + \frac{\sin(nx)}{n} \right) .
$$



43.5 Definition: Fourierreihe

Lässt man den Grad des trigonometrischen Approximationspolynoms gegen ∞ streben, so entsteht die Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \,, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Sie heißt **Fourierreihe** von u.

Bemerkung: Falls u differenzierbar ist und $u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi)$ gilt, so kann man zeigen, dass die Fourierreihe punktweise gegen u konvergiert. (Das heißt, es gibt für jede Stelle $x \in [0, 2\pi]$ und jede Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ ein $n_0(x, \varepsilon)$ derart, dass $|u(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für $n > n_0(x, \varepsilon)$ gilt.)

Besitzt u Sprungstellen, so zeigen die Fourierpolynome an den Sprungstellen ausgeprägtes Über- und Unterschwingen (*Gibbs-Phänomen*).

43.6 Praktische Bedeutung

- Fourierreihen sind unentbehrlich in der Signalverarbeitung.
- Die Fourierkoeffizienten eines Signals geben die Anteile der einzelnen Frequenzen an:

  a_k, b_k mit kleinem k entsprechen niedrigen Frequenzen
  a_k, b_k mit großem k entsprechen hohen Frequenzen

- *Filterentwurf* durch Spezifikation im Frequenzbereich:

  a) **Tiefpassfilter:**

    - dämpfen hohe Frequenzen
    - zur Elimination von Rauschen (das i. A. hochfrequent ist)

  b) **Hochpassfilter:**

    - dämpfen tiefe Frequenzen (wie Brumm- oder Rumpelgeräusche)

  c) **Bandpassfilter:**

    - lassen nur vorgegebenen Frequenzbereich passieren (z. B. mittlere Frequenzen zur Sprachübertragung)

- Ähnliche Rolle in der Bildverarbeitung:
  - Grauwertbilder sind 2D-Signale
  - Niedrige Frequenzen entsprechen großräumigen Bildstrukturen
  - Hohe Frequenzen verkörpern kleinskalige Details

- Signale und Bilder liegen meist diskret (abgetastet, „gesampelt“) vor. Dann verwendet man eine *diskrete Fouriertransformation,* die Integrale durch Summen ersetzt.

- Es existieren sehr schnelle Algorithmen zur diskreten Fouriertransformation, die ein Signal mit N Werten mit einer Komplexität von $O(N \log N)$ in seine Frequenzanteile zerlegen (*fast Fourier transform (FFT)*)

43.7 Aktuelle Weiterentwicklung: Wavelets

- Verwenden Basisfunktionen, die nicht nur in der Frequenz, sondern auch im Ort lokalisiert sind.

- Derzeit effizienteste Verfahren zur Signal- und Bildkompression (in JPEG2000- und neuen MPEG-Standards): Viele der Waveletkoeffizienten sind sehr klein und können weggelassen werden, ohne dass es auffällt.

- Hocheffiziente Algorithmen mit $O(N)$-Komplexität.