44 Orthogonale Matrizen

44.1 Motivation

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ haben wir gesehen, dass Orthonormalbasen zu besonders einfachen und schönen Beschreibungen führen.

Wir wollen das Konzept der Orthonormalität auf Matrizen erweitern. Dies führt auf die wichtige Klasse von orthogonalen Matrizen, die eine Reihe nützlicher Eigenschaften aufweisen. Unter Anderem lassen sich mit ihnen Drehungen und Spiegelungen beschreiben.

44.2 Definition: Orthogonale Matrizen

Besitzt eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthonormale Spaltenvektoren $q_{*1}, \ldots, q_{*n}$, so wird sie als **orthogonale Matrix** bezeichnet.

Man definiert ferner

$$\mathrm{O}(n) := \{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid Q \text{ orthogonal}\} .$$

Bemerkungen:
1. Eine präzisere Bezeichnung wäre „orthonormale Matrix“ – hat sich aber nicht durchgesetzt.

2. Die Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix bilden eine Orthonormal*basis* des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$.

44.3 Satz: Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Die folgenden Aussagen sind für Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ äquivalent:

a) $Q \in \mathrm{O}(n)$.

b) Q ist invertierbar, und es ist

$$Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}} .$$

c) Multiplikation von Vektoren mit Q erhält das euklidische Produkt zwischen Vektoren:

$$(Qu) \cdot (Qv) = u \cdot v \qquad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

d) Multiplikation von Vektoren mit Q erhält die euklidische Norm:

$$|Qv| = |v| \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Man nennt daher Q auch eine **Isometrie.**

Beweis:

- (a)$\Rightarrow$(b): Da die Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein Orthonormalsystem bilden, sind sie nach Satz 42.13 auch linear unabhängig. Damit hat Q den Rang n, ist also invertierbar.

  Es sei $A = (a_{ij}) = Q^{\mathrm{T}}Q$. Dann gilt:

  $$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} q_{ki}q_{kj} = q_{*i} \cdot q_{*j} = \begin{cases} 1\,, & i = j\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Also ist $Q^{\mathrm{T}}Q = I$.

  Wegen der Invertierbarkeit von Q und 36.9 ist damit $Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1}$.

- (b)$\Rightarrow$(a): Ist $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$, so folgt $Q^{\mathrm{T}}Q = I$ und damit

  $$q_{*i} \cdot q_{*j} = \begin{cases} 1\,, & i = j\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Folglich bilden die Spaltenvektoren von Q ein Orthonormalsystem, also $Q \in \mathrm{O}(n)$.

- (a)$\Rightarrow$(c):

  $$(Qu) \cdot (Qv) = (Qu)^{\mathrm{T}}\,(Qv) = u^{\mathrm{T}}\,\underbrace{Q^{\mathrm{T}}Q}_{=I}\,v = u^{\mathrm{T}}v = u \cdot v\,.$$

- (c)$\Rightarrow$(a): Gilt $(Qu) \cdot (Qv) = u \cdot v$ für beliebige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$, so muss dies insbesondere auch für die Standardbasisvektoren

  $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots\,, \qquad v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zutreffen. Damit gilt für beliebige $i, j = 1, \dots, n$

$$(Qv_i) \cdot (Qv_j) = v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1\,, & i = j\,, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da aber $Qv_i = q_{*i}$ und $Qv_j = q_{*j}$ gelten, haben wir

$$q_{*i} \cdot q_{*j} = \begin{cases} 1\,, & i = j\,, \\ 0\,, & \text{sonst,} \end{cases}$$

woraus wie oben $Q \in \mathrm{O}(n)$ folgt.

- (c)⇒(d): Man setze $u = v$ in (c).
- (d)⇒(c): Für beliebige $u, v \in \mathbb{R}^n$ muss wegen (d) gelten

$$\begin{aligned} (Q(u+v)) \cdot (Q(u+v)) &= (u+v) \cdot (u+v) \\ (Q(u-v)) \cdot (Q(u-v)) &= (u-v) \cdot (u-v)\,, \end{aligned}$$

also wegen der Distributivität des euklidischen Produktes und der Matrixmultiplikation sowie der Kommutativität des euklidischen Produktes

$$\begin{aligned} (Qu) \cdot (Qu) + 2\,(Qu) \cdot (Qv) + (Qv) \cdot (Qv) &= u \cdot u + 2\,u \cdot v + v \cdot v \\ (Qu) \cdot (Qu) - 2\,(Qu) \cdot (Qv) + (Qv) \cdot (Qv) &= u \cdot u - 2\,u \cdot v + v \cdot v \end{aligned}$$

und nach Subtraktion

$$4\,(Qu) \cdot (Qv) = 4\,u \cdot v\,.$$

Daraus folgt (c). □

44.4 Beispiele

a) Rotationen können durch orthogonale Matrizen beschrieben werden:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung um den Winkel α, vgl. 35.6(e).

$$Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

entspricht der Drehung um $-\alpha$.

Es gilt
$$\det Q = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\ .$$

b) Es gibt auch orthogonale Matrizen, die keine Drehungen beschreiben, z. B.
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Q vertauscht die x- und y-Komponente
$$Q\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$
und stellt damit eine *Spiegelung* an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten dar.

Hier gilt
$$\det Q = 0 - 1 = -1\ .$$

Kann die Determinante orthogonaler Matrizen andere Werte als ± 1 annehmen? Nein!

44.5 Satz: Determinante orthogonaler Matrizen

Für jedes $Q \in \mathrm{O}(n)$ gilt $|\det Q| = 1$.

Beweis: Aus $QQ^{\mathrm{T}} = I$ folgt
$$1 = \det I = \det(QQ^{\mathrm{T}}) = \det Q \cdot \det Q^{\mathrm{T}} = (\det Q)^2\ .$$
□

Orthogonale Matrizen Q mit $\det Q = 1$ werden noch einmal besonders ausgezeichnet.

44.6 Definition

Man definiert
$$\mathrm{SO}(n) := \mathrm{O}^+(n) := \{Q \in \mathrm{O}(n) \mid \det Q = 1\}\ .$$

44.7 Satz: Gruppeneigenschaft von $O(n)$ und $SO(n)$

$\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ sind Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (vgl. 35.12).

Man nennt $\mathrm{O}(n)$ die **orthogonale Gruppe** und $\mathrm{SO}(n)$ die **spezielle orthogonale Gruppe.**

Beweis: Übungsaufgabe

Bemerkung: Eine Matrix aus $\mathrm{O}(n)$ beschreibt eine *orthogonale Transformation* des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$, d. i. eine „starre“ Transformation des $\mathbb{R}^n$, die den Ursprung 0 fest lässt.

Matrizen aus $\mathrm{SO}(n)$ entsprechen dabei *orientierungserhaltenden* Transformationen. (Diese lassen in $\mathbb{R}^2$ z. B. den Umlaufsinn unverändert, in $\mathbb{R}^3$ die „Händigkeit“ eines Tripels von Vektoren oder den Drehsinn einer Schraube, einer Spirale etc. Entsprechende Konzepte von Orientierung lassen sich auch in höheren Dimensionen einführen.) Es handelt sich um „echte Bewegungen“, die eine stetige Überführung des Anfangs- in den Endzustand ermöglichen. Das sind beliebige Drehungen um 0 im $\mathbb{R}^n$.

Eine Matrix aus $\mathrm{O}^-(n) := \mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)$ verkörpert hingegen stets eine *orientierungsumkehrende* Transformation, d. h. eine Drehung verknüpft mit einer Spiegelung. (Nur im $\mathbb{R}^2$ reicht eine Spiegelung alleine aus.)

Wo treten orthogonale Matrizen noch auf? Beim Wechsel von einer Orthonormalbasis in eine andere.

44.8 Wechsel zwischen Orthonormalbasen

Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$. Dann existieren zu jedem $u \in \mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmte Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ mit

$$u = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \ .$$

Der Vektor $a = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$ ist also der **Koordinatenvektor** von u bezüglich der Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Es sei nun $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine weitere Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Bezüglich $\{w_1, \ldots, w_n\}$ habe u den Koordinatenvektor $b = (b_1, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$.

Problem: Gibt es eine **Übergangsmatrix** Q mit $b = Qa$?

Lösung: Man berechnet

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=1}^{n} (v_k^{\mathrm{T}} w_i) w_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k (v_k^{\mathrm{T}} w_i) \right)}_{=: b_i} w_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i w_i \ ,
\end{aligned}$$

wobei zunächst die Basisvektoren v_k bezüglich der Basis $\{w_1, \ldots, w_k\}$ ausgedrückt und anschließend die Reihenfolge der (endlichen) Summen vertauscht wurde.

Damit hat man

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(v_k^{\mathrm{T}} w_i)}_{=: q_{ik}} a_k \ ,$$

also für die gesuchte Übergangsmatrix $Q = (q_{ik})$

$$q_{ik} = v_k^{\mathrm{T}} w_i = w_i^{\mathrm{T}} v_k$$

bzw.

$$Q = \begin{pmatrix} — & w_1^{\mathrm{T}} & — \\ & \vdots & \\ — & w_n^{\mathrm{T}} & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1, & \ldots, & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Q ist also das Produkt zweier orthogonaler Matrizen.

(→ Warum ist $\begin{pmatrix} w_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ w_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ orthogonal?)
Also ist Q selbst orthogonal.

Bemerkungen:
1. Umgekehrt beschreibt bei gegebener Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ jede orthogonale Matrix Q den Wechsel zu einer anderen Orthonormalbasis $\{w_1, \dots, w_n\}$.

2. Drehungen oder allgemeiner Orthogonaltransformationen der Vektoren im $\mathbb{R}^n$ in einer festen Basis und Basiswechsel stehen in einem engen Zusammenhang:

Eine Drehung/Transformation der Basis um eine Matrix Q unter Beibehaltung der Vektoren entspricht einer Drehung/Transformation der Vektoren um $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$ unter Beibehaltung der Basis.

Beispielsweise dreht in $\mathbb{R}^2$ die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

die Vektoren bezüglich einer festen Basis um α, vgl. 35.6(e), 44.4(a).

Für eine Drehung der Basis um α erhält man dagegen Folgendes: Wählen wir für die erste Basis die Standardbasisvektoren $v_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}$, $v_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}$, so lauten die Vektoren der gedrehten Basis $w_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)^{\mathrm{T}}$, $w_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} - & w_1^{\mathrm{T}} & - \\ - & w_2^{\mathrm{T}} & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R^{-1} \, . \end{aligned}$$