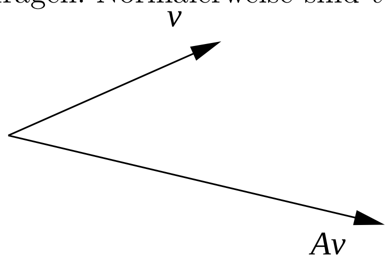
45 Eigenwerte und Eigenvektoren

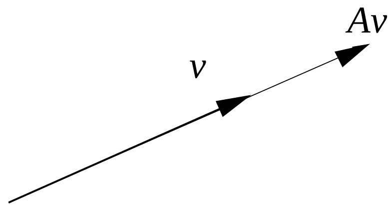
45.1 Motivation

- Eigenvektor- bzw. Eigenwertprobleme sind wichtig in vielen Gebieten wie Physik, Elektrotechnik, Maschinenbau, Statik, Biologie, Informatik, Wirtschaftswissenschaften. Eigenvektoren/Eigenwerte beschreiben oft besondere Zustände von Systemen.

- Ist $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix, so liegen die Vektoren v und Av beide in $\mathbb{R}^n$. Man kann daher sinnvoll nach ihrer gegenseitigen Lage fragen. Normalerweise sind v und Av nicht parallel.

  Gibt es ausgezeichnete Richtungen v, für die Av ein skalares Vielfaches von v ist, also
  $$A\,v = \lambda v$$
  gilt?

- *Beispiel zur Anwendung:* Schwingungsfähige Systeme besitzen bevorzugte Frequenzen – Resonanzfrequenzen – , die durch Eigenvektoren beschrieben werden können (vgl. Fourierbasen/Fourierreihen, Kap 43).
  - Erwünscht: Musikinstrumente
  - Unerwünscht: Eigenschwingungen von Bauwerken.
    Hier können so genannte „Resonanzkatastrophen“ bis zur Zerstörung führen: Die Brücke von Angers soll 1850 durch den Gleichschritt darüber marschierender Soldaten zum Einsturz gebracht worden sein. Die Hängebrücke über die Tacoma Narrows stürzte 1940 ein, nachdem sie durch den Wind zu immer stärkeren Schwingungen angeregt wurde.

45.2 Definition: Eigenwert, Eigenvektor

Es sei $A \in K^{n \times n}$. Dann heißt ein von 0 verschiedener Vektor $v \in K^n$ **Eigenvektor** von A, wenn es ein $\lambda \in K$ gibt mit

$$A\,v = \lambda v\ .$$

Der Skalar λ heißt dann **Eigenwert** von A.

Bemerkung: Wir werden nur auf $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ näher eingehen.

45.3 Beispiel

Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist ein Eigenvektor von $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, denn

$$A\,v = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3v\ .$$

Der zugehörige Eigenwert ist 3.

Wie kann man Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen?

45.4 Bestimmung von Eigenwerten

Es sei $A \in K^{n \times n}$. Aus der Bedingung $A\,v = \lambda v$ folgt $(A - \lambda I)v = 0$.

Der Nullvektor ist in der Eigenvektordefinition ausgeschlossen, da $A0 = 0$ stets gilt. Wir suchen also nichttriviale Lösungen von

$$(A - \lambda I)v = 0\ .$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem, es besitzt also nichttriviale Lösungen genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A - \lambda I) < n$ ist, also genau dann, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0\ .$$

Dies ist ein Polynom n-ten Grades in λ (das **charakteristische Polynom** von A). Seine Nullstellen sind die gesuchten Eigenwerte.

45.5 Beispiel

a) Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \\ \lambda_1 &= 4\ , \qquad \lambda_2 = -1\ . \end{aligned}$$

b) Für $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)^2 - 4 \cdot (-4) = \lambda^2 - 6\lambda + 25\ . \end{aligned}$$

Da die Diskriminante $\frac{(-6)^2}{4} - 25 < 0$ ist, hat diese quadratische Gleichung für λ keine reellen Lösungen. Es gibt also keine Eigenwerte.

Das ist plausibel: A ist gleich dem Fünffachen einer Rotationsmatrix (zum Winkel $\alpha = -\arcsin \frac{4}{5} \approx 0{,}927 \,\widehat{=}\, 53{,}1°$). Da alle Vektoren gedreht werden, gibt es keine Eigenvektoren, daher auch keine Eigenwerte.

c) Betrachten wir dieselbe Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ als Matrix aus $\mathbb{C}^{2\times 2}$, so finden wir für die charakteristische Gleichung die beiden komplexen Lösungen

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-16} = 3 \pm 4\mathrm{i}\ .$$

Es gibt also zwei konjugiert komplexe Eigenwerte.

45.6 Bemerkungen

a) Wie das letzte Beispiel zeigt, kann das charakteristische Polynom selbst dann komplexe Nullstellen besitzen, wenn A nur reelle Einträge hat. Es ist oft sinnvoll, auch die komplexen Eigenwerte mit zu betrachten.

b) Sucht man Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms, so kann dies für $n \geq 3$ schon recht schwierig werden; für $n \geq 5$ ist es im Allgemeinen nicht mehr möglich, die Lösungen auf analytischem Wege zu finden. Dann werden numerische Approximationen benötigt (ebenfalls nicht ganz einfach, vgl. späteres Kapitel).

c) Im Falle $K = \mathbb{C}$ kann man zeigen, dass $\det A$ das Produkt der Eigenwerte ist. Allgemein ist A genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

Trotz der genannten Einschränkungen ist das charakteristische Polynom in Spezialfällen sehr nützlich, etwa bei Dreiecksmatrizen (vgl. 35.4(c)).

45.7 Satz: Eigenwerte von Dreiecksmatrizen

Ist $A \in K^{n \times n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix, so sind die Eigenwerte durch die Diagonaleinträge gegeben.

Beweis: Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonaleinträge. Ist $A = (a_{ij})$, so erhält man daraus für die Matrix $A - \lambda I$

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) \ ,$$

woraus unmittelbar folgt, dass die Eigenwerte durch

$$\lambda_1 = a_{11} \ , \quad \ldots , \quad \lambda_n = a_{nn}$$

gegeben sind. □

45.8 Beispiel

Die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -1$ (vgl. Beispiel 45.3).

45.9 Bestimmung der Eigenvektoren

Angenommen, der Eigenwert λ der Matrix $A \in K^{n\times n}$ sei bereits bekannt. Dann sind die zugehörigen Eigenvektoren nichttriviale Lösungen von

$$(A - \lambda I)v = 0\ . \qquad (*)$$

Eigenvektoren sind daher *nicht* eindeutig bestimmt:

Mit v ist stets auch jedes αv, $\alpha \in K$, Eigenvektor.

Der Lösungsraum von $(*)$ heißt **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ. Man sucht daher Basisvektoren im Eigenraum und gibt diese als Eigenvektoren an.

45.10 Beispiel

Man bestimme die Basen der Eigenräume von $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Eigenwerte: Wegen $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ die Eigenwerte von A.

- Der Eigenraum zum $\lambda_1 = 2$ ist der Lösungsraum von

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

  Dies sind drei linear abhängige Gleichungen mit der Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ -s \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}\ .$$

  Eine Basis dieses Eigenraums ist daher z. B.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\ .$$

- Der Eigenraum zu $\lambda_2 = 1$ ist die Lösungsmenge von

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

  Die erste und dritte Gleichung sind linear abhängig. Addition der Gleichungen 1 und 2 ergibt $x_2 - x_3 = 0$. Setzt man $x_2 := s$, so folgt $x_3 = s$ und über Gleichung 3 schließlich $x_1 = -2s$.

  Damit ergibt sich der eindimensionale Eigenraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} ,$$

  der z. B. von dem Basisvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

Die Wirkung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ auf ihre Eigenvektoren ist besonders einfach zu überblicken. Falls es gelingt, eine Basis des $\mathbb{R}^n$ anzugeben, die nur aus Eigenvektoren von A besteht, so kann man die Wirkung von A auf alle Vektoren in $\mathbb{R}^n$ auf diesen einfachen Fall zurückführen. Deshalb interessieren wir uns jetzt für die Frage: Unter welchen Bedingungen kann man zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ angeben, die aus Eigenvektoren von A besteht?

45.11 Definition: Diagonalisierbare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **diagonalisierbar,** wenn es eine invertierbare Matrix P gibt, mit der $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

45.12 Satz: Diagonalisierbarkeit und Basis aus Eigenvektoren

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.

Beweisidee: Ist $P^{-1}AP = D$ Diagonalmatrix, so folgt $AP = PD$, und man überlegt sich, dass dann der i-te Spaltenvektor von P Eigenvektor von A ist, mit dem i-ten Diagonaleintrag von D als Eigenwert.

Umgekehrt kann man aus n gegebenen linear unabhängigen Eigenvektoren von A eine Matrix P aufbauen, die A diagonalisiert. $\square$

45.13 Beispiel:

Aus Beispiel 45.10 kennen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aus den drei linear unabhängigen Eigenvektoren erhalten wir die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Andererseits können wir aus den Eigenwerten die Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bilden und prüfen nach, dass

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Also ist tatsächlich

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Diagonalisierung von A.

45.14 Paarweise verschiedene Eigenwerte

Man kann insbesondere zeigen: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A und $v_1, \ldots, v_k$ Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten, so ist $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig. Das führt zu dem folgenden Satz.

Satz: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten, so ist A diagonalisierbar.

Bemerkung: Eine (über $\mathbb{R}$ und auch über $\mathbb{C}$) nicht diagonalisierbare Matrix ist z. B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

45.15 Satz: Eigenwerte von Potenzen einer Matrix

Es sei $A \in K^{n \times n}$, $k \in \mathbb{N}$, und λ sei Eigenwert von A zum Eigenvektor v. Dann ist λ^k Eigenwert von A^k zum Eigenvektor v.

Ist A invertierbar, so gilt diese Aussage sogar für beliebige ganze Zahlen k, wobei $A^{-k} = (A^{-1})^k$.

Beweis: Für $k > 0$ gilt

$$\begin{aligned} A^k v &= A^{k-1}(A\,v) = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda\, A^{k-1} v \\ &= \lambda\, A^{k-2}(A\,v) = \lambda^2 A^{k-2} v = \ldots = \lambda^k v\ . \end{aligned}$$

Für $k = 0$ ist $A^0 = I$. $\lambda^0 = 1$ ist offenbar Eigenwert der Einheitsmatrix für jeden Eigenvektor $v \in K^n$.

Ist A invertierbar, so gilt für den Eigenvektor v von A mit zugehörigem Eigenwert $\lambda \neq 0$

$$v = A^{-1}(A\,v) = A^{-1}(\lambda v) = \lambda(A^{-1} v)$$

und daher $A^{-1} v = \lambda^{-1} v$. Analog zum Fall $k \geq 1$ schließt man auf beliebige negative k. $\square$

45.16 Beispiel

A^7 mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 45.10 hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2^7 = 128$ und $\lambda_2 = 1^7 = 1$.