# 46 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen

## 46.1 Motivation

- Symmetrische Matrizen ($a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j$) kommen in der Praxis besonders häufig vor. Gibt es für sie spezielle Aussagen über Eigenwerte und Eigenvektoren?
- Wir hatten den Zusammenhang zwischen Diagonalisierbarkeit und linear unabhängigen Eigenvektoren kennengelernt. Spielt hier die Symmetrie von Matrizen eine besondere Rolle?

## 46.2 Satz: Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen

Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

a) $A$ hat nur reelle Eigenwerte.

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

**Beweis:** zu (a): Wir erinnern daran, dass für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ ihr Produkt mit der konjugiert komplexen Zahl $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ reell ist: $z\,\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$.

Die komplexe Konjugation von Vektoren und Matrizen wird komponentenweise definiert.

Dann ist

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}\bar{v}^{\mathrm{T}} v &= \overline{(\lambda v)}^{\mathrm{T}} v = \overline{(A v)}^{\mathrm{T}} v \\ &= \bar{v}^{\mathrm{T}} \bar{A}^{\mathrm{T}} v = \bar{v}^{\mathrm{T}} A v \qquad \text{(da } A \text{ reell und symmetrisch)} \\ &= \bar{v}^{\mathrm{T}}(\lambda v) = \lambda \bar{v}^{\mathrm{T}} v\ .\end{aligned}$$

Da $\bar{v}^{\mathrm{T}} v$ reell und ungleich 0 ist, folgt $\bar{\lambda} = \lambda$, also $\lambda \in \mathbb{R}$.

zu (b): Es seien $v_1, v_2$ Eigenvektoren von $A$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1^{\mathrm{T}} v_2 &= (Av_1)^{\mathrm{T}} v_2 = v_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} v_2 \\ &= v_1^{\mathrm{T}} (Av_2) \qquad (A \text{ symmetrisch}) \\ &= \lambda_2 v_1^{\mathrm{T}} v_2 \end{aligned}$$

und damit

$$0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_1^{\mathrm{T}} v_2 \ .$$

Folglich sind $v_1$ und $v_2$ orthogonal. $\square$

## 46.3 Beispiel

Wir betrachten die symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$. Wegen

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda - 100$$

besitzt $A$ die beiden reellen Eigenwerte $\lambda_1 = 20$ und $\lambda_2 = -5$.

*Eigenvektor zu $\lambda_1 = 20$:*

$$\begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

hat die Lösungen $x_1 = 3s, x_2 = 4s,\ s \in \mathbb{R}$.

Also ist $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_1$.

*Eigenvektor zu $\lambda_2 = -5$:*

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

hat die Lösungen $x_1 = 4s, x_2 = -3s,\ s \in \mathbb{R}$.

Also ist $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_2$.

Wegen $v_1 \cdot v_2 = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3$ sind die Eigenvektoren orthogonal.

**Bemerkung:** Es gilt auch: Ist $\lambda$ ein Eigenwert der Vielfachheit $k$, so hat $\lambda$ auch einen $k$-dimensionalen Eigenraum.

Diese Eigenschaft und die Eigenschaften aus Satz 46.2 stellen insgesamt sicher, dass $\mathbb{R}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von $A$ besitzt. Es handelt sich sogar um eine Orthogonalbasis.

Da sich aus einer Orthogonalbasis eine Orthonormalbasis herstellen lässt, ist eine symmetrische Matrix nicht nur stets diagonalisierbar, sondern die Diagonalisierung ist sogar stets durch eine orthogonale Matrix möglich.

## 46.4 Satz: Hauptachsentransformation, Spektraldarstellung

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann ist

$$A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$$

eine Diagonalisierung von $A$, wobei

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

die Diagonalmatrix aus den (reellen) Eigenwerten von $A$ ist und $Q$ eine orthogonale Matrix ist, deren Spaltenvektoren orthonormale Eigenvektoren von $A$ sind.

**Beweis:** Da $A$ symmetrisch ist, gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus orthonormalen Eigenvektoren von $A$. Nach Satz 45.12 kann daraus eine Diagonalisierung von $A$ konstruiert werden:

$$D = P^{-1}AP\ ,$$

wobei die invertierbare Matrix $P$ aus den Eigenvektoren von $A$ gebildet wird und $D$ die Diagonalmatrix der zugehörigen Eigenwerte ist, also $D = \Lambda$. Wegen der Orthonormalität der Eigenvektoren ist $P = Q$ dann eine orthogonale Matrix, und es folgt

$$A = Q\Lambda Q^{-1}\ ,$$

also wegen $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$ die behauptete Darstellung. □

**Bemerkungen:** 1. Die Diagonalisierung durch eine orthogonale Matrix bedeutet, die durch die Matrix $A$ beschriebene Abbildung von Vektoren in einem neuen Koordinatensystem zu beschreiben (orthogonale Matrix – Wechsel des Orthonormalsystems!).

$$Au = Q\Lambda Q^{-1}u$$

| | |
|---|---|
| $u$ | Vektor in Standardbasis |
| $Q^{-1}u$ | Vektor in neuer Basis aus orthonormalen Eigenvektoren von $A$ |
| $\Lambda Q^{-1}u$ | Abbildung darauf angewendet, Vektor noch immer in Eigenvektorbasis ausgedrückt |
| $Q\Lambda Q^{-1}u$ | Rücktransformiert in Standardbasis |

Die Basisvektoren der neuen Basis sind die orthonormalen Eigenvektoren von $A$. In dieser neuen Basis ist die Gestalt der Abbildung besonders einfach, da sie hier durch die Diagonalmatrix $\Lambda$ gegeben ist. Deswegen nennt man die Basisvektorrichtungen auch Hauptachsenrichtungen von $A$.

Geometrisch bedeutet dies, dass unabhängig voneinander in jeder Hauptachsenrichtung eine Streckung mit dem jeweiligen Eigenwert als Streckungsfaktor erfolgt (einschließlich Richtungsumkehr für negative Eigenwerte).

2. $A$ lässt sich auch schreiben als

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^{\mathrm{T}} + \ldots + \lambda_n v_n v_n^{\mathrm{T}} \ .$$

In dieser Darstellung erkennt man sofort, dass $\lambda_k$ die Eigenwerte und $v_k$ die zugehörigen Eigenvektoren sind, denn

$$Av_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \underbrace{v_i^{\mathrm{T}} v_k}_{=0 \text{ für } i \neq k} = \lambda_k v_k \ .$$

## 46.5 Beispiel

Wir wollen $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ diagonalisieren. Wir benutzen die Eigenwerte und Eigenvektoren aus Beispiel 46.3, normieren letztere aber zu $w_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$.

Damit finden wir die orthogonale Matrix

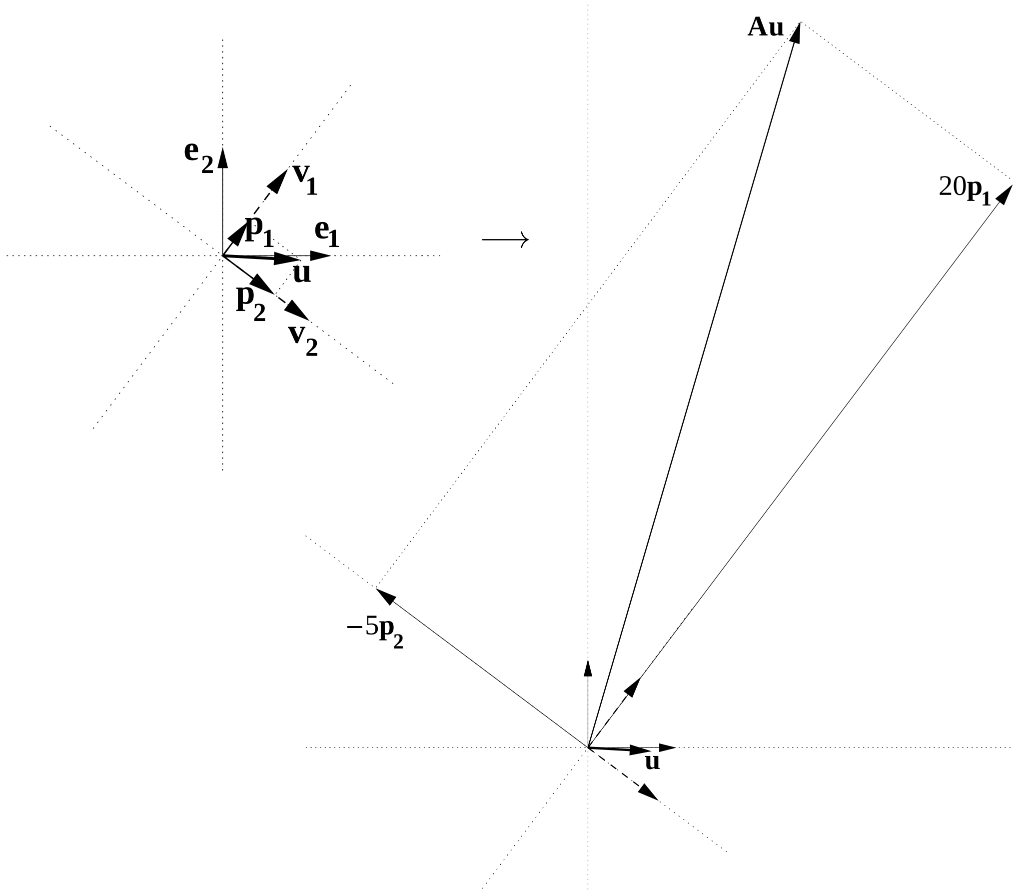
$$Q = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{T}} A Q &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 60 & 80 \\ -20 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 500 & 0 \\ 0 & -125 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)\ , \end{aligned}$$

wie zu erwarten war.

Anwendung auf einen Vektor $u$:




| | |
|---|---|
| $u$ | gegebener Vektor |
| $e_1, e_2$ | Standardbasisvektoren $e_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}, e_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}$ |
| $v_1, v_2$ | orthonormale Basisvektoren von $A$ |
| $p_1, p_2$ | Projektionen von $u$ auf Hauptachsenrichtungen (entsprechen Darstellung von $u$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2\}$) |
| $20p_1, -5p_2$ | Ergebnis der Anwendung der Diagonalmatrix |
| $Au$ | resultierender Vektor |

## 46.6 Anwendung von Funktionen auf symmetrische Matrizen

Satz 45.15 über die Eigenwerte von Potenzen einer Matrix motiviert die folgenden Überlegungen:

- Ist $p(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom $m$-ten Grades, so kann man dieses direkt auf $n \times n$-Matrizen anwenden:

$$p(A) = a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 I \ .$$

Aus Satz 45.15 folgt, dass alle $A^k$, $k = 0, \ldots, m$, dieselben Eigenvektoren wie $A$ besitzen und die zugehörigen Eigenwerte die entsprechenden Potenzen der Eigenwerte von $A$ sind.

Ist damit $\lambda$ ein Eigenwert zum Eigenvektor $v$ von $A$, so gilt auch

$$p(A)v = p(\lambda)v \ .$$

- Ist dabei $A$ eine symmetrische Matrix, so kann sie dargestellt werden als

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^{\mathrm{T}} + \ldots + \lambda_n v_n v_n^{\mathrm{T}} \ ;$$

entsprechend gilt auch

$$p(A) = p(\lambda_1) v_1 v_1^{\mathrm{T}} + \ldots + p(\lambda_n) v_n v_n^{\mathrm{T}} \ .$$

- Über Potenzreihen (vgl. MfI 1) überträgt sich dieses Vorgehen auf beliebige analytische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (also solche, die durch Potenzreihen darstellbar sind). Man hat dann allgemein

$$f(A) = f(\lambda_1) v_1 v_1^{\mathrm{T}} + \ldots + f(\lambda_n) v_n v_n^{\mathrm{T}}$$

für eine solche Funktion $f$.

- Sofern die Funktion auch für komplexe Argumente definiert ist, kann eine entsprechende Verallgemeinerung sogar für nichtsymmetrische diagonalisierbare Matrizen angegeben werden (wird hier nicht weiter behandelt).

**Beispiel:** Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

haben wir

$$\exp(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}}{2} & \frac{-\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}}{2} \\ \frac{-\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}}{2} & \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}}{2} \end{pmatrix} \ .$$