48 Quadratische Formen und positiv definite Matrizen

48.1 Motivation

- Wir wollen eine wichtige Klasse symmetrischer Matrizen charakterisieren, die vielfältige Anwendungen in Computergrafik, aber auch Physik und anderen Gebieten besitzt.
- Wir wollen das Verhalten quadratischer Funktionen in mehreren Variablen untersuchen.
- Wir werden wichtige Klassen geometrischer Kurven und Flächen kennen lernen.

48.2 Definition: Quadratische Formen, Quadriken

Es sei $x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann heißt

$$x^{\mathrm{T}} A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

quadratische Form.

Ferner seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$q(x) = x^{\mathrm{T}} A x + b^{\mathrm{T}} x + c$$

quadratisches Polynom in $x_1, \dots, x_n$.

Die Menge aller Punkte, die die quadratische Gleichung

$$q(x) = x^{\mathrm{T}} A x + b^{\mathrm{T}} x + c = 0$$

erfüllen, heißt **Quadrik.**

48.3 Beispiele

a) Der Ausdruck

$$7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$$

$$= 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_2$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ist eine quadratische Form.

b) $q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 7x_2 + 3$ ist ein quadratisches Polynom.

c) Die Ellipsengleichung
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0$$
beschreibt eine Quadrik mit $n = 2$.

Bemerkung: Quadriken mit $n = 2$ können allgemein als Kegelschnitte (Kreise, Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln) interpretiert werden. Für $n = 3$ ergeben sich Kugeln, Ellipsoide, Hyperboloide, Paraboloide. (Vgl. nächste Vorlesung.)

48.4 Definition: definite, semidefinite, indefinite Matrizen

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ seien die Eigenwerte von A. Dann heißt A

- **positiv definit,** falls $\lambda_i > 0$ für alle i,
- **positiv semidefinit,** falls $\lambda_i \geq 0$ für alle i,
- **negativ definit,** falls $\lambda_i < 0$ für alle i,
- **negativ semidefinit,** falls $\lambda_i \leq 0$ für alle i,
- **indefinit,** falls es λ_i, λ_j mit $\lambda_i\lambda_j < 0$ gibt.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen positiver Definitheit, quadratischen Formen und Determinanten von Untermatrizen.

48.5 Satz: Positiv definite Matrizen und quadratische Formen

Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann ist A positiv definit genau dann, wenn

$$x^{\mathrm{T}} A x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0.$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann gilt für $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ $(x \neq 0)$:

$$\begin{aligned}
x^{\mathrm{T}} A x &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right)^{\mathrm{T}} A \left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right)^{\mathrm{T}} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{A v_j}_{=\lambda_j v_j} \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i x_i x_j \underbrace{v_i^{\mathrm{T}} v_j}_{=0 \text{ für } i \neq j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \, |v_i|^2 > 0 \, .
\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$": Ist umgekehrt A nicht positiv definit, so existiert ein Eigenwert $\lambda \leq 0$ von A mit zugehörigem Eigenvektor $v \neq 0$. Damit ist

$$v^{\mathrm{T}} A v = v^{\mathrm{T}} \lambda v = \underbrace{\lambda}_{\leq 0} \underbrace{v^{\mathrm{T}} v}_{>0} \leq 0$$

im Widerspruch zu $x^{\mathrm{T}} A x > 0$ für alle $x \neq 0$. □

Bemerkung: Analog ist A positiv semidefinit genau dann, wenn $x^{\mathrm{T}} A x \geq 0$ für alle $x \neq 0$. Mit $<$ oder $\leq$ erhält man Kriterien für negative Definitheit/Semidefinitheit.

Der Zusammenhang zwischen positiver Definitheit und Determinanten von Untermatrizen ist Gegenstand des folgenden Satzes. Er stellt ein wichtiges Kriterium zum Überprüfen der positiven Definitheit ohne Eigenwertberechnung dar.

48.6 Satz: Hauptminorenkriterium

Eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn ihre **Hauptminoren**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

für $k = 1, \dots, n$ positiv sind.

Bemerkung: Ein ähnliches Kriterium für Semidefinitheit anzugeben ist nicht so einfach: Man muss dann nämlich *alle* quadratischen Untermatrizen (und nicht nur die Hauptminoren) einbeziehen.

48.7 Beispiel

Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Ist A positiv definit?

Die Hauptminoren sind

$$\begin{aligned}
\det(2) &= 2 > 0 \\
\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} &= 4 - 1 = 3 > 0 \\
\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 2(18 - 16) + (-9 + 12) - 3(-4 + 6) \\
&= 4 + 3 - 6 = 1 > 0\,.
\end{aligned}$$

Also ist A positiv definit.

Analog zu Quadratwurzeln aus nichtnegativen reellen Zahlen lassen sich auch „Wurzeln“ aus positiv semidefiniten Matrizen definieren. (Das entspricht der Anwendung der Wurzelfunktion auf Matrizen, vgl. 46.6; jedoch ist die Wurzelfunktion nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und analytisch.)

48.8 Satz: Wurzel einer positiv semidefiniten Matrix

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit. Dann existiert eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B^2 = A$. Man schreibt auch $A^{1/2} := B$.

Beweis: Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A und $v_1, \dots, v_n$ die zugehörigen normierten Eigenvektoren. Dann gilt mit $Q := (v_1|\dots|v_n)$ und $\Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, dass $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ (Satz 46.4).

Wir setzen

$$\Lambda^{1/2} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := Q\Lambda^{1/2}Q^{\mathrm{T}} \,.$$

Dann ist

$$B^2 = Q\Lambda^{1/2}\underbrace{Q^{\mathrm{T}}Q}_{=I}\Lambda^{1/2}Q^{\mathrm{T}} = Q\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}Q^{\mathrm{T}} = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} = A \,.$$

□

Positiv und negativ definite Matrizen spielen eine wichtige Rolle beim Nachweis von Minima und Maxima von Funktionen mehrerer Variabler (vgl. MfI 3).

Gibt es obere und untere Schranken für Werte quadratischer Formen?

48.9 Definition: Rayleigh-Quotient

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$. Dann nennt man

$$\mathrm{R}_A(x) := \mathrm{R}(x) := \frac{x^{\mathrm{T}}Ax}{x^{\mathrm{T}}x}$$

den **Rayleigh-Quotienten.**

Der Rayleigh-Quotient lässt sich durch die Eigenwerte von A abschätzen.

48.10 Satz: Rayleigh-Prinzip

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ und zugehörigen orthonormalen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$. Dann gilt:

a) $\lambda_n \leq \mathrm{R}(x) \leq \lambda_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

b) Diese Grenzen werden tatsächlich angenommen:

$$\lambda_1 = \max_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ x \neq 0}} \mathrm{R}(x) \,, \qquad \lambda_n = \min_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ x \neq 0}} \mathrm{R}(x) \,.$$

Beweis: zu (a): Aus $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ folgt $x^{\mathrm{T}} x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$; analog zum Beweis von Satz 48.5 ist außerdem

$$x^{\mathrm{T}} A x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \,.$$

Daraus ergibt sich

$$\mathrm{R}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \begin{cases} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} & = \lambda_1 \\[2ex] \geq \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} & = \lambda_n \,. \end{cases}$$

zu (b) Setzt man $x = v_k$, so folgt

$$\mathrm{R}(v_k) = \frac{v_k^{\mathrm{T}} A v_k}{v_k^{\mathrm{T}} v_k} = \frac{v_k^{\mathrm{T}} \lambda_k v_k}{v_k^{\mathrm{T}} v_k} = \lambda_k \,.$$

Insbesondere ist $\mathrm{R}(v_1) = \lambda_1$, $\mathrm{R}(v_n) = \lambda_n$. $\square$