49 Quadriken

49.1 Motivation

Quadriken (vgl. Def. 48.2) stellen eine wichtige Klasse geometrischer Objekte dar, mit Anwendungen in Computergrafik, Bildverarbeitung, Visualisierung, Physik u. a.

Ziel: Wir wollen eine gegebene Quadrik auf eine einfache Form transformieren, aus der sich ihre geometrische Gestalt unmittelbar ablesen lässt.

49.2 Grundlegende Verfahrensweise

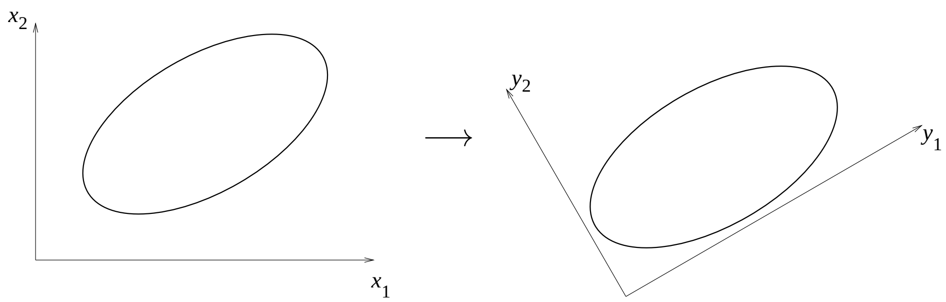
Gegeben sei eine Quadrik

$$q(x) = x^{\mathrm{T}} A x + b^{\mathrm{T}} x + c = 0 \ ,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $x, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Schritt 1: Elimination der gemischten quadratischen Terme

Das Koordinatensystem wird so gedreht, dass A in eine Diagonalmatrix übergeht.



Berechne dazu die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A und eine Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren mit $\det(v_1 \mid \dots \mid v_n) = +1$. (Falls $\det(v_1 \mid \dots \mid v_n) = -1$, ersetzt man v_1 durch $-v_1$.)

Mit $Q = (v_1 \mid \dots \mid v_n) \in \mathrm{SO}(n)$ gilt dann

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Q^{\mathrm{T}} A Q \ ,$$

und aus $x^{\mathrm{T}}Ax + b^{\mathrm{T}}x + c = 0$ folgt

$$x^{\mathrm{T}}Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}x + b^{\mathrm{T}}\underbrace{QQ^{\mathrm{T}}}_{=I}x + c = 0\ .$$

Mit $y := Q^{\mathrm{T}}x$, $\tilde{b} := Q^{\mathrm{T}}b$ ergibt sich daher

$$y^{\mathrm{T}}\Lambda y + \tilde{b}^{\mathrm{T}}y + c = 0$$

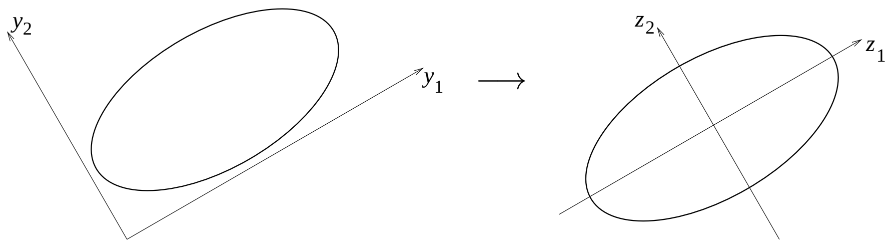
bzw. ausgeschrieben

$$\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 + \tilde{b}_1 y_1 + \ldots + \tilde{b}_n y_n + c = 0$$

(gemischte quadratische Terme sind entfallen).

Schritt 2: Elimination linearer Terme (soweit möglich)

Durch Translation des Koordinatensystems kann erreicht werden, dass $\lambda_k y_k^2$ und $\tilde{b}_k y_k$ jeweils für dasselbe k nicht zugleich vorkommen.



Es sei dazu ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit $\lambda_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, r$ sowie $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Für $i = 1, \ldots, r$ wird der lineare Term $\tilde{b}_i y_i$ durch die quadratische Ergänzung eliminiert:

$$\begin{aligned} z_i &:= y_i + \frac{\tilde{b}_i}{2\lambda_i} && (i = 1, \ldots, r) \\ z_i &:= y_i && (i = r+1, \ldots, n)\ . \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + \tilde{b}_{r+1} z_{r+1} + \ldots + \tilde{b}_n z_n^2 + \tilde{c} = 0$$

mit

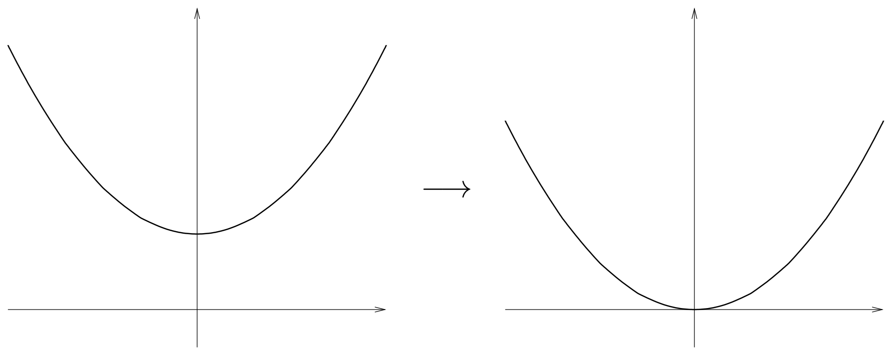
$$\tilde{c} = c - \sum_{i=1}^{r} \frac{\tilde{b}_i^2}{4\lambda_i} \quad \text{und} \quad r = \operatorname{rang} A\ .$$

Schritt 3: Elimination der Konstanten (falls möglich)

Ist (mindestens) einer der Koeffizienten $\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_n$ ungleich 0 (ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit sei dies $\tilde{b}_n$), so kann $\tilde{c}$ eliminiert werden durch

$$z_n \mapsto \tilde{z}_n - \frac{\tilde{c}}{\tilde{b}_n} \; .$$

Dies ist eine weitere Translation des Koordinatensystems, z. B. wie in der folgenden Abbildung.



Resultat: Normalformen der Quadrik

Darstellung in einem Koordinatensystem, in dem möglichst viele Koeffizienten verschwinden.

Für $r := \operatorname{rang} A = n$*:*

$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 + d = 0$$

Für $r < n$*:*

entweder

$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + e_{r+1} z_{r+1} + \ldots + e_n z_n = 0$$

oder

$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + d = 0 \; .$$

49.3 Beispiel

Die Quadrik

$$q(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{80}{\sqrt{5}}x_2 + 4 = 0$$

soll auf Normalform gebracht werden.

Es ist $q(x) = x^{\mathrm{T}}Ax + b^{\mathrm{T}}x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \ , \quad b = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 20 \\ -80 \end{pmatrix} \ , \quad c = 4 \ .$$

Schritt 1: Hauptachsentransformation von $\boldsymbol{A}$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$ mit $Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (beachte $\det Q = 1$).

Mit $\Lambda = Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $\tilde{b} = Q^{\mathrm{T}}b = \begin{pmatrix} -36 \\ 8 \end{pmatrix}$ ergibt sich für $y = Q^{\mathrm{T}}x$

$$9y_1^2 + 4y_2^2 - 36y_1 + 8y_2 + 4 = 0 \ .$$

Schritt 2: Elimination der linearen Terme

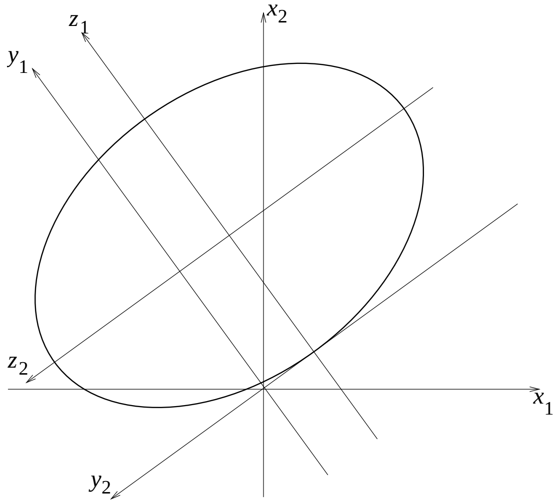
Es ist

$$9(y_1^2 - 4y_1 + 4) + 4(y_2^2 + 2y_2 + 1) = -4 + 36 + 4 \ ,$$

also mit $z_1 := y_1 - 2$, $z_2 := y_2 + 1$

$$\begin{aligned} & 9z_1^2 + 4z_2^2 = 36 \\ \Rightarrow \quad & \frac{z_1^2}{4} + \frac{z_2^2}{9} = 1 \ . \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt eine Ellipse mit den Halbachsen 2 und 3.

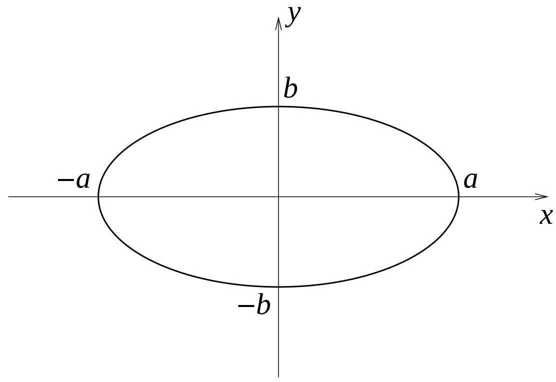


49.4 Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}^2$ (Kegelschnitte)

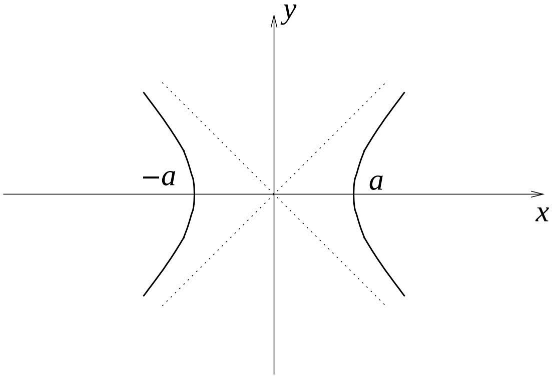
In dieser Übersicht bezeichnen wir die Koordinaten z_1, z_2 mit x, y.

(i) $\operatorname{rang} A = 2$ (alle Eigenwerte $\neq 0$)

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$: Ellipse



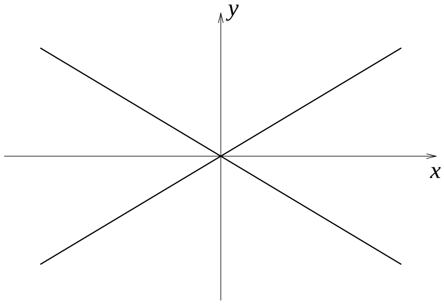
b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$: Hyperbel



c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$: leere Menge

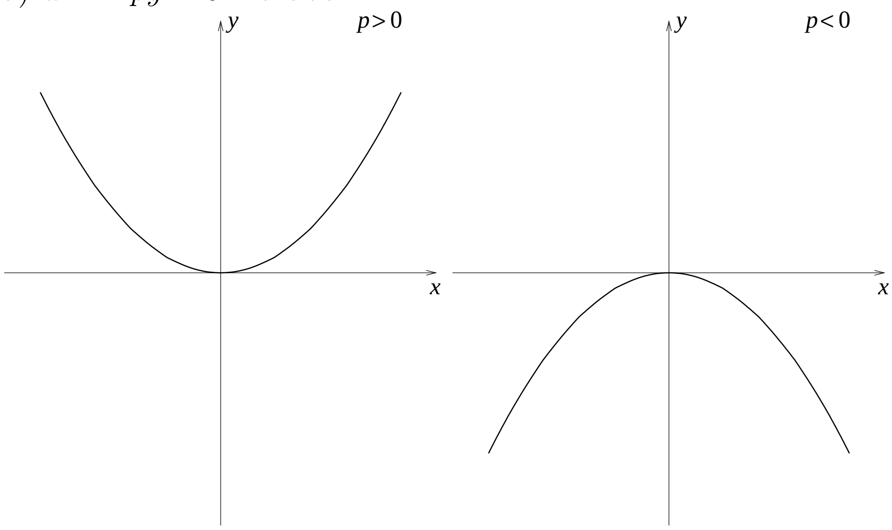
d) $x^2 + a^2y^2 = 0$, $a \neq 0$: Punkt $(0, 0)$

e) $x^2 - a^2y^2 = 0$, $a \neq 0$: Geradenpaar $y = \pm\dfrac{1}{a}x$

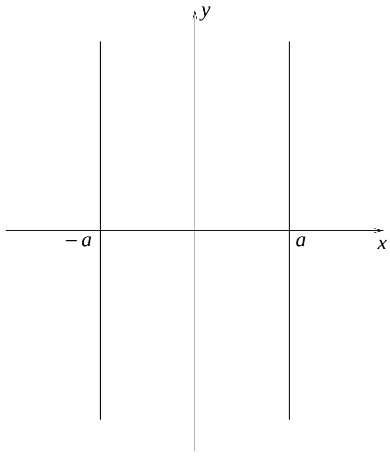


(ii) $\operatorname{rang} A = 1$ (ein Eigenwert gleich 0)

a) $x^2 - 2py = 0$: Parabel



b) $x^2 - a^2 = 0$, $a \neq 0$: ein Paar paralleler Geraden $x = \pm a$



c) $x^2 + a^2 = 0$, $a \neq 0$: leere Menge

d) $x^2 = 0$: Doppelgerade $x = 0$ (y-Achse)

(iii) $\operatorname{rang} A = 0$ (beide Eigenwerte gleich 0):

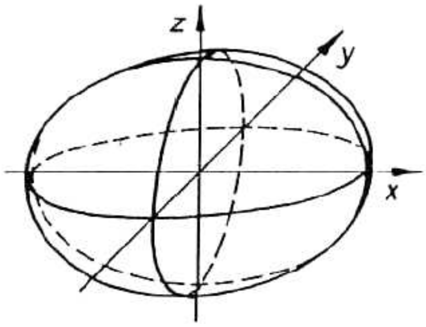
$b_1 x + b_2 y + c = 0$ Gerade

49.5 Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}^3$

In dieser Übersicht bezeichnen wir die Koordinaten z_1, z_2, z_3 mit x, y, z.

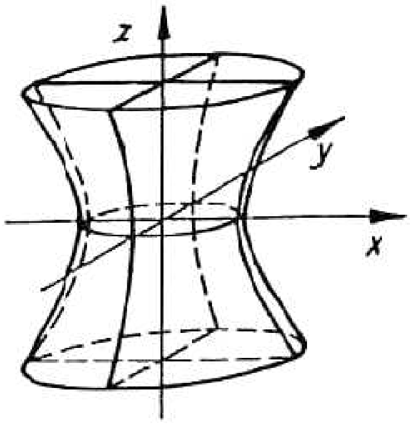
(i) $\operatorname{rang} A = 3$ (alle Eigenwerte $\neq 0$)

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$: Ellipsoid



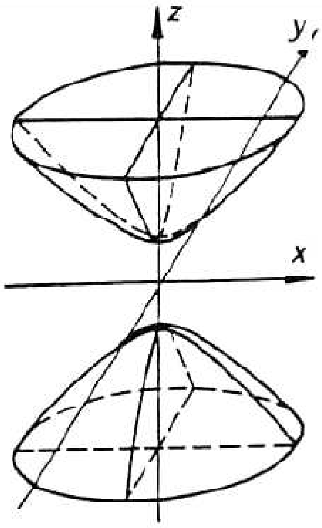
b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + 1 = 0$: leere Menge

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$: einschaliges Hyperboloid



(Schnitte parallel zur x-y-Ebene: Ellipsen; Schnitte parallel zur x-z- und y-z-Ebene: Hyperbeln)

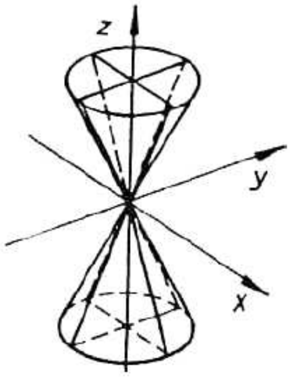
d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$: zweischaliges Hyperboloid



(Schnitte parallel zur x-y-Ebene: Ellipsen; Schnitte parallel zur x-z- und y-z-Ebene: Hyperbeln)

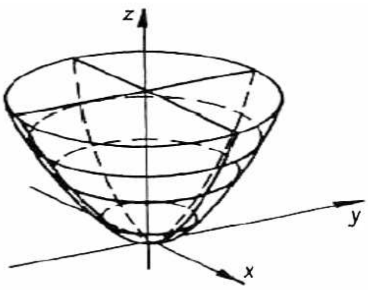
e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$: Punkt $(0, 0, 0)$

f) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$: elliptischer Kegel



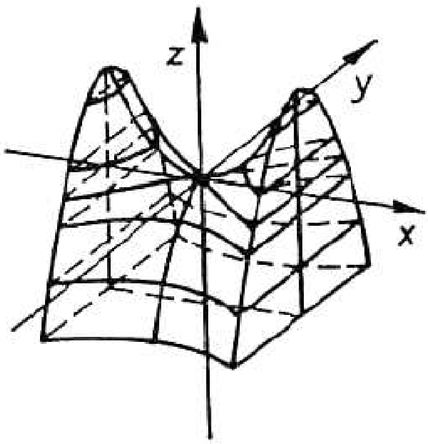
(ii) $\operatorname{rang} A = 2$ (ein Eigenwert gleich 0)

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$: elliptisches Paraboloid



(Schnitte parallel zur x-y-Ebene: Ellipsen; Schnitte parallel zur x-z- und y-z-Ebene: Parabeln)

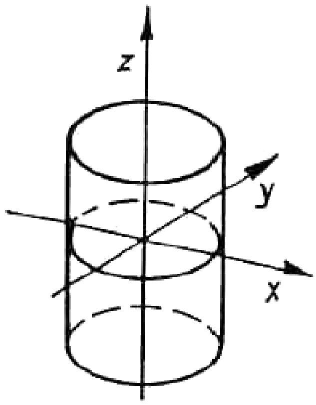
b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$: hyperbolisches Paraboloid



(sattelartig; Schnitte parallel zur x-y-Ebene: Hyperbeln; Schnitte parallel zur x-z- und y-z-Ebene: Parabeln)

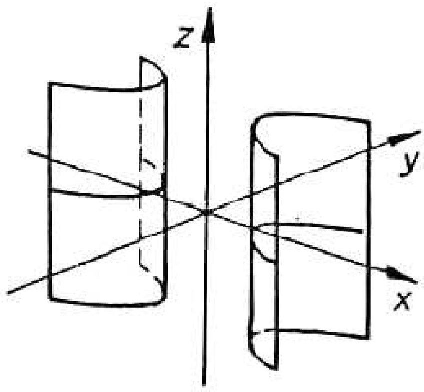
c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$: leere Menge

d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$: elliptischer Zylinder



(sattelartig; Schnitte parallel zur x-y-Ebene: Ellipsen; Schnitte parallel zur x-z- und y-z-Ebene: Geradenpaare)

e) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$: hyperbolischer Zylinder



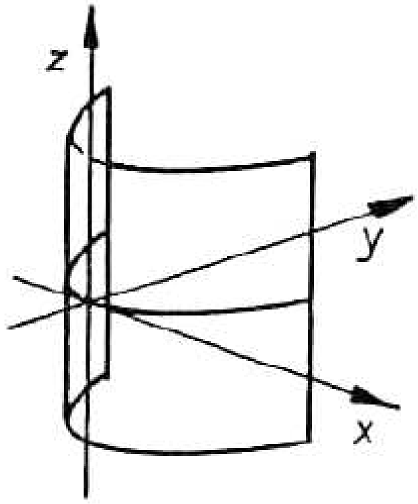
(Schnitte parallel zur x-y-Ebene: Hyperbeln; Schnitte parallel zur x-z- und y-z-Ebene: Geradenpaare)

f) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$: Gerade ($z$-Achse)

g) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$: Ebenenpaar mit z-Achse als Schnittgerade

(iii) rang $A = 1$ (zwei Eigenwerte gleich 0)

a) $x^2 - 2py = 0$: parabolischer Zylinder



b) $x^2 - a^2 = 0$: paralleles Ebenenpaar

c) $x^2 + a^2 = 0$: leere Menge

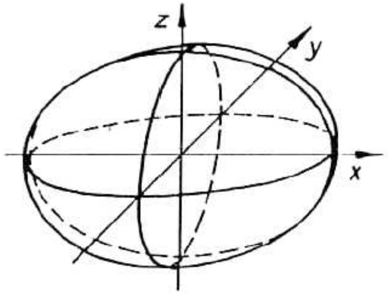
d) $x^2 = 0$: Ebene (y-z-Ebene)

(iv) rang $A = 0$

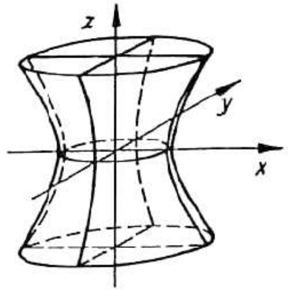
$b_1 x + b_2 y + b_3 z + c = 0$: allgemeine Ebenengleichung

Überblick über Quadriken im $\mathbb{R}^3$

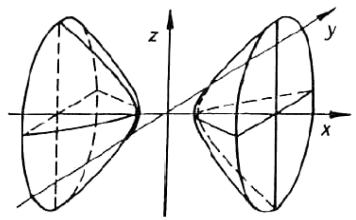
rang $A = 3$



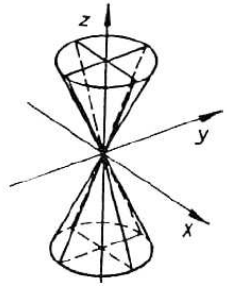
Ellipsoid



einschaliges Hyperboloid

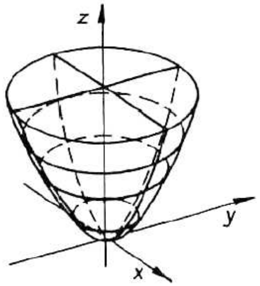


zweischaliges Hyperboloid

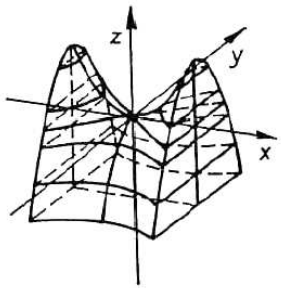


elliptischer Kegel

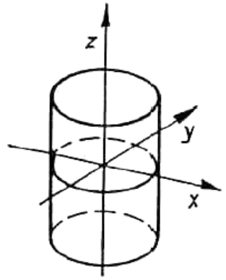
rang $A = 2$



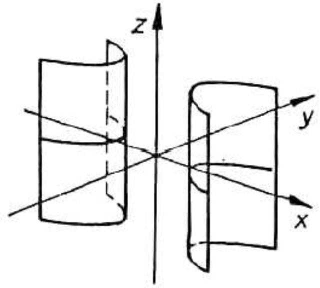
elliptisches Paraboloid



hyperbolisches Paraboloid

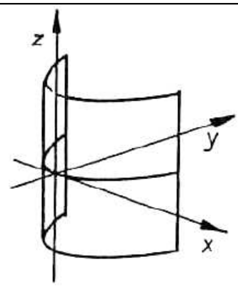


elliptischer Zylinder



hyperbolischer Zylinder

rang $A = 1$



parabolischer Zylinder