50 Matrixnormen und Eigenwertabschätzungen

50.1 Motivation

- Die Berechnung der Eigenwerte einer Matrix ist aufwändig (vgl. Kapitel 45, Kapitel 51).
- Kann man die Eigenwerte einer Matrix mit geringem Aufwand abschätzen?
- Dies spielt z. B. eine Rolle bei Konvergenzbetrachtungen zu iterativen Algorithmen.
- Ein wichtiges Hilfsmittel für solche Abschätzungen sind Matrixnormen.

50.2 Definition: Matrixnorm

Unter einer **Matrixnorm** versteht man eine Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\|A\| \geq 0$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *(Nichtnegativität)*
   $\|A\| = 0$ genau dann, wenn $A = 0$ *(Nichtdegeneriertheit)*

b) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *(Dreiecksungleichung)*

d) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **(Submultiplikativität)**

50.3 Beispiele

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) **Gesamtnorm:** $\|A\|_{\mathrm{G}} := n \cdot \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$

b) **Zeilensummennorm:** $\|A\|_{\mathrm{Z}} := \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

c) **Spaltensummennorm:** $\|A\|_{\mathrm{S}} := \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

d) **Frobeniusnorm:** $\|A\|_{\mathrm{F}} := \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$

e) **Spektralnorm:** $\|A\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}$,

wobei $\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)$ der größte Eigenwert von $A^{\mathrm{T}}A$ ist.

Falls A symmetrisch ist, gilt $\|A\|_2 = \max\limits_i \left\{ |\lambda_i| \;\middle|\; \lambda_i \text{ Eigenwert von } A \right\}$.

Da Matrizen und Vektoren oft gemeinsam auftreten, sollten Matrix- und Vektornormen zueinander passend gewählt werden.

50.4 Definition: Verträglichkeit von Normen

Eine Matrixnorm $\|\cdot\|_{\mathrm{M}}$ heißt **verträglich (kompatibel)** mit einer Vektornorm $\|\cdot\|_{\mathrm{V}}$, falls für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|Ax\|_{\mathrm{V}} \le \|A\|_{\mathrm{M}} \cdot \|x\|_{\mathrm{V}} \;.$$

50.5 Beispiele

Zu den ***p*-Normen**

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} , & 1 \le p < \infty \;, \\ \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i| \;, & p = \infty \end{cases}$$

als Vektornormen bestehen folgende Verträglichkeiten von Matrixnormen:

a) $\|A\|_{\mathrm{G}}$ und $\|A\|_{\mathrm{S}}$ sind kompatibel zur **Betragssummennorm** $\|x\|_1$.

b) $\|A\|_{\mathrm{G}}$, $\|A\|_{\mathrm{F}}$ und $\|A\|_2$ sind kompatibel zur **euklidischen Norm** $\|x\|_2$.

c) $\|A\|_{\mathrm{G}}$ und $\|A\|_{\mathrm{Z}}$ sind kompatibel zur **Maximumsnorm** $\|x\|_\infty$.

Beweis: Wir zeigen nur beispielhaft die Verträglichkeit von $\|A\|_{\mathrm{G}}$ und $\|x\|_{\infty}$.

$$
\begin{aligned}
\|Ax\|_{\infty} &= \max_i \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right\} \\
&\leq \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| \right\} \qquad \text{(Dreiecksungleichungen)} \\
&\leq \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} \max_{k,l} |a_{kl}| \cdot \max_m |x_m| \right\} \\
&= n \cdot \max_{k,l} |a_{kl}| \cdot \max_m |x_m| \\
&= \|A\|_{\mathrm{G}} \cdot \|x\|_{\infty} \ .
\end{aligned}
$$

□

Zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\|_{\mathrm{V}}$ existieren oftmals viele kompatible Matrixnormen $\|\cdot\|_{\mathrm{M}}$. Es gibt jedoch eine Matrixnorm, für die die Abschätzung

$$\|Ax\|_{\mathrm{V}} \leq \|A\|_{\mathrm{M}} \cdot \|x\|_{\mathrm{V}}$$

am schärfsten ist und die daher in der Praxis häufig verwendet wird.

50.6 Definition: Zugeordnete Matrixnorm

Die zu einer gegebenen Vektornorm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathrm{V}}$ definierte Zahl

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathrm{V}}}{\|x\|_{\mathrm{V}}} = \max_{\|x\|_{\mathrm{V}}=1} \|Ax\|_{\mathrm{V}}$$

heißt der Vektornorm $\|\cdot\|_{\mathrm{V}}$ **zugeordnete Matrixnorm.**

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die zugeordnete Matrixnorm alle Eigenschaften der Definitionen 50.2 und 50.4 besitzt und die kleinste aller Matrixnormen mit dieser Verträglichkeit ist.

50.7 Beispiele

Vektornorm	zugeordnete Matrixnorm
Betragssummennorm $\|x\|_1$	Spaltensummennorm $\|A\|_{\mathrm{S}}$
euklidische Norm $\|x\|_2$	Spektralnorm $\|A\|_2$
Maximumsnorm $\|x\|_\infty$	Zeilensummennorm $\|A\|_{\mathrm{Z}}$

Matrixnormen sind nützlich zur Abschätzung von Eigenwerten.

50.8 Satz: Eigenwertabschätzung mit Matrixnormen

Ist λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|A\|$ eine beliebige, zu einer Vektornorm kompatible Matrixnorm, so gilt

$$|\lambda| \leq \|A\| \ .$$

Beweis: Es sei v ein Eigenvektor zu λ. Dann folgt

$$|\lambda| \cdot \|v\| = \|\lambda v\| = \|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\| \ .$$

Da $v \neq 0$, gilt $\|v\| \neq 0$. Also ist $|\lambda| \leq \|A\|$. □

50.9 Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & -0{,}1 \\ 0 & 2 & 0{,}4 \\ -0{,}2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\mathrm{G}} &= 3 \max_{i,j} |a_{ij}| = 3 \cdot 3 = 9 \\
\|A\|_{\mathrm{Z}} &= \max\{1{,}2\ ;\ 2{,}4\ ;\ 3{,}2\} = 3{,}2 \\
\|A\|_{\mathrm{S}} &= \max\{1{,}2\ ;\ 2{,}1\ ;\ 3{,}5\} = 3{,}5 \\
\|A\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{1^2 + 0{,}1^2 + (-0{,}1)^2 + 2^2 + 0{,}4^2 + (-0{,}2)^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{14{,}22} \approx 3{,}77 \ .
\end{aligned}$$

$\|A\|_Z$ liefert die schärfste Abschätzung:

$$|\lambda| \le \|A\|_Z = 3{,}2\ .$$

Tatsächlich gilt

$$\lambda_1 \approx 3{,}0060\ ; \qquad \lambda_2 \approx 2{,}0078\ ; \qquad \lambda_3 \approx 0{,}9862\ .$$

Offenbar erlaubt Satz 50.8 nur die Abschätzung des betragsmäßig größten Eigenwertes. Gibt es auch Abschätzungen für alle Eigenwerte?

50.10 Satz von Gerschgorin

Gegeben sei eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Die Vereinigung der Kreisscheiben

$$K_i := \left\{ \mu \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mu - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

enthält alle Eigenwerte der Matrix A.

b) Jede Zusammenhangskomponente aus m solchen Kreisen enthält genau m Eigenwerte (mit ihren Vielfachheiten gezählt).

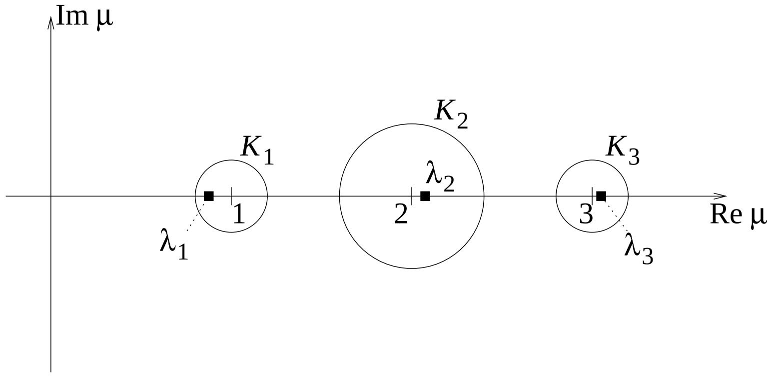
Beweis: Siehe z. B. Stoer/Bulirsch: Einführung in die numerische Mathematik II. Springer, Berlin.

50.11 Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & -0{,}1 \\ 0 & 2 & 0{,}4 \\ -0{,}2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ findet man

$$K_1 = \left\{ \mu \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mu - 1| \le 0{,}2 \right\}$$

$$K_2 = \left\{ \mu \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mu - 2| \leq 0{,}4 \right\}$$
$$K_3 = \left\{ \mu \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mu - 3| \leq 0{,}2 \right\} .$$



Sämtliche Eigenwerte liegen in $K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Da K_1, K_2, K_3 sich gegenseitig nicht überlappen, liegt nach (b) in jeder der Kreisscheiben genau ein Eigenwert. Ferner ist A invertierbar, da 0 außerhalb von $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ liegt und somit kein Eigenwert sein kann (vgl. 45.6).

50.12 Definition und Korollar: Invertierbarkeit strikt diagonaldominanter Matrizen

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **strikt diagonaldominant,** wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt
$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \; .$$

Jede strikt diagonaldominante Matrix A ist invertierbar.

Beweis: Für eine solche Matrix A liegt 0 außerhalb der Gerschgorin-Kreisscheiben, ist also nach dem Satz von Gerschgorin kein Eigenwert von A. □

Bemerkung: Ganz analog lässt sich schließen, dass eine *symmetrische* Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit positiven Diagonaleinträgen a_{ii}, die strikt diagonaldominant ist, positiv definit ist.