Mathematik für Informatiker II

Prof. Dr. Benjamin Doerr	M.Sc. Kai Hagenburg	Sommersemester 2010
MPI für Informatik	MIA Group	Universität des Saarlandes

Hausübung Blatt 1
Ausgabe: 16. April 2010 **Abgabe:** 23. April 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Aussagenlogik Wiederholung, 2+2+2+2=8 Punkte)

Zum Formulieren logischer Zusammenhänge gibt es verkürzende Schreibweisen für bestimmte mathematische Formulierungen:

$\neg A$	:	negiert eine Aussage.
$A \wedge B$	:	"A und B" (Konjunktion)
$A \vee B$	:	"A oder B" (Disjunktion)
$A \Rightarrow B$	:	"A impliziert B" (Implikation)
$A \Leftrightarrow B$	:	"A ist äquivalent zu B" (Äquivalenz)
$\forall$	:	für alle
$\exists$	:	es existiert ein
$\exists!$	:	es existiert genau ein

Formulieren Sie folgende Aussagen in dieser Formelsprache und negieren Sie sie anschließend. Dabei sei G immer eine Menge, $A, B, C, \ldots$ seien Aussagen.
Beispiel: Es existieren zwei verschiedene Elemente in G.

$$\exists x \in G\ \exists y \in G:\ x \neq y$$
$$\text{Negation}:\ \forall x \in G\ \forall y \in G:\ x = y.$$

a) Wenn A gilt, dann auch B.

b) Für alle $x \in G$ existiert ein $y \in G$, so dass $x \cdot y = e$ ist.

c) Wenn aus A schon B folgt, dann sind C und D äquivalent.

d) Für je zwei Gruppenelemente x und y, die verschieden sind, gibt es genau ein $z \in G$ mit $xz = y$.

Aufgabe 2 (Halbgruppen und Monoide, 3 Punkte)

Sei G eine Menge und $\cdot : G \times G \to G$ eine Verknüpfung auf G. $(G, \cdot)$ heißt Halbgruppe, wenn das Assoziativgesetz gilt. Besitzt eine Halbgruppe zusätzlich noch ein neutrales Element, heißt sie Monoid.
Sei $G := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$. Sei weiterhin $\oplus$ eine Verknüpfung definiert mit $(f \oplus g)(n) := f(n) + g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $(G, \oplus)$ eine Halbgruppe? Ein Monoid? Was gilt, wenn man $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$ ersetzt? Begründen Sie!

Aufgabe 3 (Gruppen und Untergruppen, 2+2+2+2=8 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Sei $(G, \cdot)$ multiplikative Gruppe und $a, b \in G$. Dann gilt $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ und $(a^{-1})^{-1} = a$.

b) Sei $(G, \cdot)$ eine nichtleere Halbgruppe. Zeigen Sie, das G genau dann eine Gruppe ist, wenn für alle $a, b \in G$ die Gleichungen $a \cdot x = b$ und $y \cdot a = b$ lösbar sind.

c) Seien U, V Untergruppen einer Gruppe G. Dann ist $U \cap V$ auch Untergruppe von G.

d) Seien U, V Untergruppen einer Gruppe G und $UV := \{uv \mid u \in U,\ v \in V\}$. Dann gilt:

$$UV \text{ ist Untergruppe von } G \;\Leftrightarrow\; UV = VU.$$

Aufgabe 4 (Fragen zum Thema Gruppen, 1+1+1+1+1=5 Punkte)

Beantworten Sie folgende Frage.

a) Sei M die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Welche der vier Grundrechenarten $+, -, \cdot, :$ ist eine Verknüpfung auf M?

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie dabei Ihre Antwort in kurzen Sätzen, bzw. mit einem kurzen Beweis.

b) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann gilt für alle $a, b \in G$ und $m \in \mathbb{N}$: $(ab)^m = a^m b^m$.

c) Das kartesische Produkt $G_1 \times G_2$ zweier Gruppen $(G_1, \bullet)$, $(G_2, *)$ mit der komponentenweisen Verknüpfung $(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) := (g_1 \bullet h_1, g_2 * h_2)$ ist eine Gruppe.

d) Eine nichtleere Teilmenge U einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn für alle $a, b \in U$ auch ab^{-1} ein Element von U ist.

e) Seien U und V Untergruppen einer Gruppe G und $a, b \in G$. Dann gilt: $aU = bV$ genau dann, wenn $U = V$.