Mathematik für Informatiker II

Prof. Dr. Benjamin Doerr
MPI für Informatik

M.Sc. Kai Hagenburg
MIA Group

Sommersemester 2010
Universität des Saarlandes

Hausübung Blatt 13
Ausgabe: 9. Juli 2010 **Abgabe:** 16. Juli 2010 vor der Vorlesung

Anmerkung: Dieses Übungsblatt beinhaltet nur Bonusaufgaben, die zusätzliche Punkte einbringen können.

Aufgabe 1 (6* Punkte)

Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum von

$$\begin{aligned} &a.)\quad 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 \\ &b.)\quad 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_2 \end{aligned}$$

unter der Bedingung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Für welche x_1, x_2,x_3 werden diese Werte angenommen?

Aufgabe 2 (6* Punkte)

a) Überprüfen Sie die folgenden Matrizen auf ihre Definitheit:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Überprüfen Sie die folgenden Quadriken auf ihre Definitheit:

(a) $-x_1^2 - 3x_2^2$

(b) x_1x_2

c) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt negativ definit, wenn $x^\top Ax < 0$ für jedes $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ist. Zeigen Sie: A negativ definit genau dann wenn $-A$ positiv definit.

Aufgabe 3 (6* Punkte)

Sei $x^\top Ax$ eine quadratische Form mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Man definiere die Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $T(x) = x^\top Ax$.

a) Beweisen Sie: $T(x + y) = T(x) + 2x^\top Ay + T(y)$

b) Beweisen Sie: $T(kx) = k^2T(x)$

c) Ist T eine lineare Transformation? Begründen Sie!

Aufgabe 4 (6* Punkte)

Bringen Sie folgende Quadriken auf Normalform und geben Sie den resultierenden Kegelschnitt an:

a) $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 114x + 34y + 73 = 0$

b) $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$