Mathematik für Informatiker II

Prof. Dr. Benjamin Doerr
MPI für Informatik

M.Sc. Kai Hagenburg
MIA Group

Sommersemester 2010
Universität des Saarlandes

Hausübung Blatt 2
Ausgabe: 23. April 2010 **Abgabe:** 30. April 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (2+2+2+3=9 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei U Untergruppe von G und $G : U = 2$, dann ist U Normalteiler von G.

b) Seien H, K und L Halbgruppen[1]. $\varphi : H \to K$ und $\psi : K \to L$ seien Homomorphismen. Dann ist $\psi \circ \varphi : H \to L$ ein Homomorphismus.

c) Seien H und K Halbgruppen. Sei $\varphi : H \to K$ ein Isomorphismus. Dann ist $\varphi^{-1} : K \to H$ ebenfalls ein Isomorphismus.

d) Ist G Gruppe und U einzige Untergruppe von G mit Ordnung $n \in \mathbb{N}$, so ist U Normalteiler von G.

Aufgabe 2 (2+2+3=7 Punkte)

Diese Aufgabe hat zum Zweck den Homomorphiesatz für Gruppen zu beweisen, den Sie bereits aus der Vorlesung kennen. Beweisen Sie hierzu folgende Aussagen:

a) Sei N Normalteiler einer Gruppe G. Dann gilt $gN = hN$ genau dann, wenn $gh^{-1} \in N$.

b) Seien G, H Gruppen und $f : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann ist $\mathrm{Ker}(f)$ Normalteiler von G.

c) Seien G, H Gruppen und $f : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann gilt $G/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Bild}(f)$. *Hinweis:* Verwenden Sie hierfür eine wohldefinierte Funktion $\varphi(g\mathrm{Ker}(f)) := f(g)$.

Aufgabe 3 (2 + 6 = 8 Punkte)

Auf der Menge $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ seien die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert durch

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) &:= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2) \\
(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) &:= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, \\
&\quad\; a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, \\
&\quad\; a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2, \\
&\quad\; a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)
\end{aligned}$$

Praktischerweise schreibt man $a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d$ mit den imaginären Einheiten i, j und k. Dies ermöglicht den Gebrauch der Rechenregeln für reelle Zahlen, wenn man spezielle Multiplikationsregeln für i, j und k beachtet.

[1] Abbildungen zwischen Halbgruppen seien analog zu Abbildungen zwischen Gruppen definiert.

(a) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für die Multiplikation der Elemente i, j und k auf.

Ist $q = a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d$ eine Quarternion, dann nennt man

i) $\overline{q} = \overline{a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}c + \mathrm{k}d} := a - \mathrm{i}b - \mathrm{j}c - \mathrm{k}d$ die zu q konjugierte Quarternion, und

ii) $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ den Betrag von q.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ein Schiefkörper, aber kein Körper ist.

Bemerkung: Die oben definierte Multiplikation wurde 1843 von Sir William Rowan Hamilton entdeckt. Heute finden Quarternionen in der Robotik und in der Computergrafik Anwendung.