Mathematik für Informatiker II

Prof. Dr. Benjamin Doerr
MPI für Informatik

M.Sc. Kai Hagenburg
MIA Group

Sommersemester 2010
Universität des Saarlandes

Hausübung Blatt 3

Ausgabe: 30. April 2010 **Abgabe:** 7. Mai 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen: Sei $a, b \in K[x], b \neq 0$.

a) Sei $\deg(a) \geq \deg(b)$. Dann existiert $q, r \in K[x]$ mit

$$a = qb + r, \qquad \deg(r) < \deg(a)$$

b) *Satz:* Es existiert $q, r \in K[x]$ mit

$$a = qb + r, \qquad \deg(r) < \deg(b)$$

Aufgabe 2 (3+3=6 Punkte)

Gegeben seien je 2 Polynome $a, b \in \mathbb{R}[x]$. Berechnen Sie jeweils einen $\mathrm{ggT}(a, b)$ der beiden Polynome.

a) $a_1 := 8x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 2x \qquad b_1 := -2x^3 - 5x^2 + 2x - 3$

b) $a_2 := 28x^5 - 66x^4 + 60x^3 - 32x^2 + 29x + 5 \qquad b_2 := 14x^3 - 33x^2 + 23x + 4$

Geben Sie alle erforderlichen Zwischenschritte an!

Aufgabe 3 (4+2=6 Punkte)

a) Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\overline{\alpha}$ eine Nullstelle von f ist, wenn auch α eine Nullstelle ist. Weiterhin besitzen beide die gleiche Vielfachheit und es gilt $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) \in \mathbb{R}[x]$.
Hinweis: Betrachten Sie eine vollständige Induktion über den Grad des Polynoms f.

b) Ist f irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$, so ist $\deg(f) \leq 2$.

Aufgabe 4 (2+2+2=6 Punkte)

Wir betrachten den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Wir definieren eine Addition auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als komponentenweise Addition $\oplus$ und die Multiplikation $\odot$ vorgegeben durch

$$(x, y) \odot (x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y)$$

a) Zeigen Sie, dass diese so definierte Struktur ein Null- und ein Einselement besitzt.

b) Zeigen Sie, dass jedes von 0 verschiedene Element ein multiplikatives Inverses besitzt.

c) Ist $K \times K$ mit den oben definierten Verknüpfungen ein Körper?