Prof. Dr. Benjamin Doerr
MPI für Informatik

M.Sc. Kai Hagenburg
MIA Group

Sommersemester 2010
Universität des Saarlandes

Hausübung Blatt 7

Ausgabe: 28. Mai 2010 **Abgabe:** 4. Juni 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen falls möglich die Inversen der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Machen Sie dabei in jedem Rechenschritt deutlich, welche Umformung Sie vornehmen. Wie lautet die Lösung $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ des linearen (Matrix-)Gleichungssystems $AX = B$?

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & -12 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 5x_4 & = & -21 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 10 \\ -6x_1 & + & 6x_2 & + & 12x_3 & + & 10x_4 & = & -22 \end{array}$$

Machen Sie dabei in jedem Rechenschritt deutlich, welche Umformung Sie vornehmen.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (2+2=4 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir das Problem der Maschinengenauigkeit bei Rechenoperationen betrachten. Dazu sei ein Maschinenfehler $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $1 \pm \varepsilon = 1$ und $1 \pm \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$ gilt (Dies sind Bedingungen der Maschinengenauigkeit). Sei nun folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\varepsilon x_1 + 2x_2 = 1, \tag{1}$$
$$x_1 + x_2 = 1. \tag{2}$$

a) Lösen Sie das von den Gleichungen (1) und (2) aufgestellte Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und verwenden Sie dabei die Bedingungen der Maschinengenauigkeit.

b) Seien nun beide Gleichungen permutiert, d.h.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ \varepsilon x_1 + 2x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Lösen Sie das von diesen Gleichungen aufgestellte Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und verwenden Sie dabei die Bedingungen der Maschinengenauigkeit. Können Sie Schlüsse ziehen über die Bedeutung von Permutationen innerhalb des Gauß-Algorithmus?

Aufgabe 4 (2+4=6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $A \in K^{m \times n}$ das Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann für jedes $b \in K^m$ lösbar ist, wenn $\operatorname{rang}(A) = m$ gilt.

b) Sei $Ax = b$ ein System mit n Gleichungen und n Unbekannten, und A ist invertierbar. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich die erweiterte Matrix (A, b) ohne Zeilenvertauschungen zur reduzierten Zeilenstufenform transformieren lässt. Wie viele Additionen und Multiplikationen werden beim Lösen des Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-Algorithmus mit Verwenden der Gauß-Jordan-Form benötigt?