Mathematik für Informatiker II

Prof. Dr. Benjamin Doerr — MPI für Informatik
M.Sc. Kai Hagenburg — MIA Group
Sommersemester 2010 — Universität des Saarlandes

Hausübung Blatt 8

Ausgabe: 4. Juni 2010 **Abgabe:** 11. Juni 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (3 + 3 = 6 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe zugelassener, geeigneter Umformungen auf möglichst einfache Weise die folgenden Determinanten:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & a & a \\ 2 & 3 & b & b \\ 2 & 3 & 4 & c \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 2 (3 + 3 = 6 Punkte)

a) Beweisen Sie Satz 39.10a: Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann ist $\operatorname{rang}(A) = n$, d.h. A invertierbar, genau dann wenn $\det(A) \neq 0$.

b) Gegeben sei die folgende Matrix $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} = \min(i, j)$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: $\det A_n = 1$.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir nur den Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Wir definieren das Vektorprodukt (oder auch Kreuzprodukt) $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Hilfe der folgenden (symbolisch verwendeten) Determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$.

a) Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Welche Bedeutung hat $\vec{a} \times \vec{b}$ geometrisch?

b) Beweisen Sie

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}^\top \vec{c}\vec{b} - \vec{a}^\top \vec{b}\vec{c} \qquad !$$

c) Gegeben seien zwei nicht parallele Vektoren $\vec{a}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{c} \neq \vec{0}$. Für welche Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \qquad ?$$

d) Bestimmen Sie die Fläche des von den Vektoren $\vec{u} = (1, 3, 6)^\top$ und $\vec{v} = (3, 2, 2)^\top$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 4 (2 + 2 = 4 Punkte)

a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{c} = (5, 6, 1)^\top$ und $\vec{d} = (-8, -8, 6)^\top$. Ermitteln Sie zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$, für die gilt: $\vec{y}$ ist parallel zu $\vec{d}$, $\vec{x}$ ist orthogonal zu $\vec{d}$, und $\vec{x} + \vec{y} = \vec{c}$.

b) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (3, 0, 4)^\top$ und $\vec{b} = (-1, 2, -2)^\top$. Geben Sie einen Vektor $\vec{n}$ mit $|n| = 1$ an, und der orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Bestimmen Sie weiterhin ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass die Linearkombination $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{n}$ die Länge $|s| = \sqrt{13}$.