Mathematik für Informatiker II

Prof. Dr. Benjamin Doerr
MPI für Informatik

M.Sc. Kai Hagenburg
MIA Group

Sommersemester 2010
Universität des Saarlandes

Hausübung Blatt 9
Ausgabe: 11. Juni 2010 **Abgabe:** 18. Juni 2010 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Für $f, g \in C[0,1]$ wird durch

$$d(f,g) \quad := \quad \left(\int_0^1 (f(x) - g_t(x))^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

auf $C[0,1]$ eine Metrik definiert. Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass der Abstand der Funktionen $f(x) = e^x - 1$ und $g_t(x) = t \cdot x$ bezüglich dieser Metrik minimal wird.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Sei V ein reeller Vektorraum und $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ eine Norm auf V. Gelten die folgenden Eigenschaften für $u, v \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$

- $\|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha|\ \|v\|$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$,

dann folgt daraus die Eigenschaft $\|v\| \geq 0$.

b) Sei X eine beliebige Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf X. Gelten die folgenden Eigenschaften für $u, v, w \in X$

- $d(u,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$
- $d(u,v) = d(v,u)$
- $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$,

dann folgt daraus die Eigenschaft $d(u,v) \geq 0$.

Aufgabe 3 (5+3+2=10 Punkte)

Die p-Norm eines Vektors $(v_1, \ldots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ wird definiert als

$$\|v\|_p \quad := \quad \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

und

$$\|v\|_\infty \quad := \quad \max(|v_1|, \ldots, |v_n|).$$

a) Berechnen Sie die Distanz der Punkte $(1,6)^\top$ und $(2,3)^\top$ in den durch die p-Norm induzierten Metriken für $p = 1, 2, \infty$. Überlegen Sie sich, warum man für $p = 1$ von der *Cityblock*-Metrik spricht.

b) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem Vektorraum V, die die Parallelogrammgleichung

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

(siehe Präsenzübung 8) erfüllt. Zeigen Sie, dass dann ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ existiert auf V mit $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

c) Zeigen, dass die p-Normen für $p = 1$ und $p = \infty$ nicht von einem Skalarprodukt induziert sind.

Aufgabe 4 (4 + 1 = 5 Punkte)

a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis des von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraums V des $\mathbb{R}^5$.

b) Ist $v_5 = (0, 1, 0, 1, 0)^\top$ in V?