Prof. Dr. Benjamin Doerr
MPI für Informatik

M.Sc. Kai Hagenburg
MIA Group

Sommersemester 2010
Universität des Saarlandes

Präsenzübung Blatt 2
Ausgabe: 26./27. April 2010

Aufgabe 1

Welche der Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

a) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto z + 1,$

b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^*,\ z \mapsto z^2 + 1,$

c) $f_3 : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*,\ z \mapsto |z|,$

d) $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto |z|.$

Dabei ist die Verknüpfung in $\mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$ jeweils die Addition und $\mathbb{C}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{Q}^*$ jeweils die Multiplikation.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ zusammen mit der additiven und multiplikativen Verknüpfung

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\ , \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

ein Körper ist. Machen Sie an entsprechender Stelle deutlich, welche strukturellen Eigenschaften Sie im Laufe ihrer Untersuchungen nachgewiesen haben.

Aufgabe 3

Diese Aufgabe illustriert den Homomorphiesatz für Gruppen mit Hilfe der alternierenden Gruppe. Die alternierende Gruppe $(A_n, \circ)$ ist eine Untergruppe der Permutationsgruppen $(S_n, \circ)$, die wir letzte Woche kennengelernt haben. Jede Permutation von $M = \{1, \ldots, n\}$ lässt sich durch eine Sequenz von Vertauschungen je zweier Elemente (Transpositionen) darstellen.

Gegeben sei die alternierende Gruppe

$$A_4 = (\{\sigma_i\ |i \in \{1, \ldots, 12\}\}, \circ),$$

mit

$$\mathrm{id} := \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei die Gruppe

$$\mathbb{Z}_3 = (\{[0], [1], [2]\}, +)$$

sowie der Homomorphismus $f : A_4 \to \mathbb{Z}_3$ mit

$$\begin{array}{cccc} f(\mathrm{id}) = [0], & f(\sigma_2) = [1], & f(\sigma_3) = [2], & f(\sigma_4) = [2], \\ f(\sigma_5) = [1], & f(\sigma_6) = [1], & f(\sigma_7) = [2], & f(\sigma_8) = [2], \\ f(\sigma_9) = [1], & f(\sigma_{10}) = [0], & f(\sigma_{11}) = [0], & f(\sigma_{12}) = [0] \end{array}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie den Kern von f.

b) Bestimmen Sie die Elemente der Faktorgruppe $A_4/\mathrm{Ker}(f)$.

c) Geben Sie den Isomorphismus von $A_4/\mathrm{Ker}(f)$ auf $\mathbb{Z}_3$ explizit an.