Aufgabe 1:

Die TM kopiert zunächst bin(a) auf das 2. Band und löscht bin(a) und das # auf dem ersten Band (q_0). Beide Köpfe werden auf dem letzten Zeichen von bin(a) bzw. bin(b) positioniert (q_1). Wir subtrahieren stellenweise von rechts nach links ohne Übertrag (q_2) bzw. mit Übertrag (q_3).

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$,

$\Sigma = \{0, 1, \#\}$, $\Gamma = \{0, 1, \#, B\}$, $F = \{q_4\}$

$\delta(q_0, (a, B)) = (q_0, (B, a), (R, R))$, $\quad a \in \{0,1\}$

$\delta(q_0, (\#, B)) = (q_1, (B, B), (R, N))$

$\delta(q_1, (a, B)) = (q_1, (a, B), (R, N))$, $\quad a \in \{0,1\}$

$\delta(q_1, (B, B)) = (q_2, (B, B), (L, L))$

$\delta(q_2, (a, 0)) = (q_2, (a, B), (L, L))$, $a \in \{0, B\}$ // $0-0=0$

$\delta(q_2, (1, 0)) = (q_3, (1, B), (L, L))$ // $0-1=1$ + Übertrag

$\delta(q_2, (a, 1)) = (q_2, (1, B), (L, L))$, $a \in \{0, B\}$ // $1-0=1$

$\delta(q_2, (1, 1)) = (q_2, (0, B), (L, L))$ // $1-1=0$

$\delta(q_2, (B, B)) = (q_4, (B, B), (N, N))$

$\Longrightarrow$

$\delta(q_3, (a,0)) = (q_3, (1,B), (L,L)), a \in \{0,B\}$ // $0-(0+\text{Üb.}) = 1+\text{Üb.}$

$\delta(q_3, (1,0)) = (q_3, (0,B), (L,L))$ // $0-(1+\text{Üb.}) = 0+\text{Üb.}$

$\delta(q_3, (a,1)) = (q_2, (0,B), (L,L)), a \in \{0,B\}$ // $1-(0+\text{Üb}) = 0$

$\delta(q_3, (1,1)) = (q_3, (1,B), (L,L))$ // $1-(1+\text{Üb.}) = 1+\text{Üb.}$

In allen anderen Fällen stoppt die TM
($\delta(q_i, (a,b)) = (q_i, (a,b), (N,N))$ und akzeptiert nicht.

Fortsetzung Aufgabe 3:

Der Algorithmus benutzt höchstens $O(|w|^3)$ Aufrufe der TM für "$w \in L$?" (polynomiale Zeit) und braucht zusätzlich $O(|w|^3)$ Zeit $\Rightarrow$ Laufzeit polynomial

$\Rightarrow L^* \in P$.

Aufgabe 2:

$L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$ rekursiv $\Rightarrow$ es ex. TM $T_{L_1 \cup L_2}$ und $T_{L_1 \cap L_2}$, die $L_1 \cup L_2$ und $L_1 \cap L_2$ entscheiden

L_1, L_2 rekursiv aufzählbar $\Rightarrow$ es ex. TM T'_{L_1} und T'_{L_2}, die Worte aus L_1 bzw. L_2 akzeptieren$^{(*)}$ (aber nicht notwendigerweise L_1 bzw. L_2 entscheiden)

Wir zeigen nun, dass es eine TM T_{L_1} gibt, die L_1 entscheidet.
T_{L_1} arbeitet wie folgt. $\Rightarrow L_1$ ist rekursiv.

Sei $w \in \Sigma^*$ beliebig.

1) Falls $T_{L_1 \cap L_2}$ akzeptiert: akzeptiere ebenfalls

2) Falls $T_{L_1 \cup L_2}$ nicht akzeptiert: akzeptiere ebenfalls nicht

3) Es gilt nun: $w \in (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (L_2 \cap \overline{L_1})$ $(**)$

Simuliere T'_{L_1} und T'_{L_2} parallel, jeweils mit Eingabe w. (z.B. T'_{L_1} auf Band 1, T'_{L_2} auf Band 2).

Wegen $(*)$ und $(**)$ akzeptiert genau eine der beiden TM T'_{L_1} und T'_{L_2} nach endlicher Zeit.

3a) Falls T'_{L_1} akzeptiert: akzeptiere ebenfalls

3b) Falls T'_{L_2} akzeptiert: akzeptiere nicht

Analog für T_{L_2} (Verhalten bei 3a), 3b) vertauschen).

Aufgabe 3

Da $L \in P$, gibt es eine TM, die "$w \in L$?" in polynomialer Zeit entscheidet. Wir beschreiben eine TM, die "$w \in L^*$?" in polynomialer Zeit entscheidet.

Es gilt: $w_i \dots w_j \in L^* \iff w_i \dots w_j \in L$ oder
$\exists\ i \leq k < j$ mit $w_i \dots w_k \in L^*$
und $w_{k+1} \dots w_j \in L^*$

Definiere $V_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } w_i \dots w_j \in L^* \\ 0, & \text{falls } w_i \dots w_j \notin L^* \end{cases}$.

Algorithmus:

für alle $i = 1, \dots n$:

$V_{i,i} := \begin{cases} 1, & w_i \in L \\ 0, & w_i \notin L \end{cases}$

für alle $\ell = 2, \dots, n$:

für alle $i = 1, \dots, n+1-\ell$:

{ $j := i + \ell - 1$;

$V_{ij} := 0$;

falls $w_j \dots w_j \in L$: $V_{ij} := 1$

sonst für alle $k = i, \dots j-1$:

falls $V_{ik} = 1$ und $V_{k+1,j} = 1$

dann $V_{i,j} := 1$

}

falls $V_{1,n} = 1$: "$w \in L^*$" ausgeben

sonst : "$w \notin L^*$" ausgeben

Aufgabe 4:

a) Die Zustände q_6 und q_7 sind vom Startzustand nicht erreichbar und daher überflüssig (Def. 4.2.1).

b)

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	/	1		0	3	0
q_1	/	/	4	0	5	0
q_2	/	/	/	0	6	0
q_3	/	/	/	/	0	
q_4	/	/	/	/	/	0
q_5	/	/	/	/	/	/

0. markiere alle Paare aus $F \times \bar{F} \cup \bar{F} \times F$

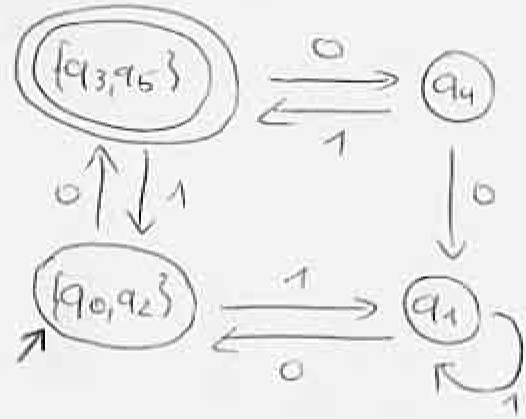
	q_1, q_2	$\delta(q_1,0), \delta(q_2,0)$	$\delta(q_1,1), \delta(q_2,1)$	
1.	(0,1)	(0,3)	...	markiere (0,1)
2.	(0,2)	(3,5)	~~(1,1)~~	$L(3,5) \leftarrow (0,2)$
3.	(0,4)	(1,3)	...	markiere (0,4)
4.	(1,2)	(0,5)	...	markiere (1,2)
5.	(1,4)	(0,1)	...	markiere (1,4)
6.	(2,4)	(1,5)	...	markiere (2,4)
7.	(3,5)	~~(4,4)~~	(0,2)	$L(0,2) \leftarrow (3,5)$

$[q_0] = \{q_0, q_2\}$

$[q_1] = \{q_1\}$

$[q_3] = \{q_3, q_5\}$

$[q_4] = \{q_4\}$



Aufgabe 5:

a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = 2\cdot|w|_1\}$

Kontextfrei, aber nicht regulär

nicht regulär.

Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma. Wähle $w = 0^{2n}1^n$.

Wegen $|uv| \leq n$ ist $uv = 0^{|uv|}$ und $uv^ix = 0^{2n+(i-1)\cdot|v|}1^n$.

Wegen $v \neq \varepsilon$ ist $|uv^ix|_0 > 2\cdot|uv^ix|_1$ ↯

Kontextfrei:

Man kann einen Kellerautomaten konstruieren, der L_1 mit leerem Keller akzeptiert. Die Anzahl der Zeichen im Keller entspricht $\big||w|_0 - 2|w|_1\big|$, das Vorzeichen von $|w|_0 - 2|w|_1$ kann man sich durch zwei Zustände merken.

oder: $S \rightarrow 0S0S1S \mid 0S1S0S \mid 1S0S0S \mid \varepsilon$

b) $L_2 = \{\langle M\rangle \mid$ die TM M hält auf leerem Band$\}$

nicht kontextfrei

$L_2 = H_\varepsilon$, H_ε ist nicht rekursiv

$\Rightarrow$ (Chomsky-Hierarchie) L_2 ist nicht kontextfrei

c) $L_3 = \{ x w x^R \mid x, w \in \{0,1\}^*, x \neq \varepsilon \}$

regulär

$L_3' := 0(0+1)^*0 + 1(0+1)^*1$

Behauptung: $L_3 = L_3'$

„$\supseteq$": klar

„$\subseteq$": Das erste Zeichen von x und das letzte von x^R sind gleich – also entweder 0 oder 1.

Aufgabe 6:

$S \rightarrow ABb \mid a$

$B \rightarrow \varepsilon \mid Ba$

$A \rightarrow S \mid bAb$

1. Terminale

$S \rightarrow ABC \mid a$

$B \rightarrow \varepsilon \mid BF$

$A \rightarrow S \mid CAC$

$C \rightarrow b$

$F \rightarrow a$

2. lange Regeln

$S \rightarrow AD \mid a$

$D \rightarrow BC$

$B \rightarrow \varepsilon \mid BF$

$A \rightarrow S \mid CE$

$E \rightarrow AC$

$C \rightarrow b$

$F \rightarrow a$

3. ε-Regeln

$S \rightarrow AD \mid a$

$D \rightarrow BC \mid C$

$B \rightarrow BF \mid F$

$A \rightarrow S \mid CE$

$E \rightarrow AC$

$C \rightarrow b$

$F \rightarrow a$

4. Kettenregeln

$S \rightarrow AD \mid a$

$D \rightarrow BC \mid b$

$B \rightarrow BF \mid a$

$A \rightarrow AD \mid a \mid CE$

$E \rightarrow AC$

$C \rightarrow b$

$F \rightarrow a$

$G' = (V', T, S, P')$, $V' = \{S, A, B, C, D, E\}$, P'

$T = \{a, b\}$

Aufgabe 7:

a) Der NPDA legt im Zustand q_0 die gelesenen Zeichen auf dem Keller ab. Nichtdeterministisch kann er in den Zustand q_1 übergehen. Jetzt wird beim Lesen einer 0 und einer 1 auf dem Keller die 1 auf dem Keller entfernt und umgekehrt.

$K = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \#, \delta, F)$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$,
$\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \#\}$,

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, a) &= \{(q_0, 0a)\}, & a \in \{0,1,\#\} \\
\delta(q_0, 1, a) &= \{(q_0, 1a)\}, & a \in \{0,1,\#\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, a) &= \{(q_1, a)\}, & a \in \{0,1,\#\} \\
\delta(q_1, 0, 1) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, 1, 0) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, \#) &= \{(q_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

b) $(q_0, 010101, \#) \vdash (q_0, 10101, 0\#)$
$\vdash (q_0, 0101, 10\#) \vdash (q_0, 101, 010\#)$
$\vdash (q_1, 101, 010\#) \vdash (q_1, 01, 10\#)$
$\vdash (q_1, 1, 0\#) \vdash (q_1, \varepsilon, \#) \vdash (q_2, \varepsilon, \varepsilon)$

$(q_0, 0110, \#) \vdash (q_0, 110, 0\#)$
$\vdash (q_0, 10, 10\#) \vdash (q_1, 10, 10\#) \not\vdash \ldots$

Aufgabe 8:

a) falsch

Jede Mehrband-TM kann durch eine Einband-TM simuliert werden (quadratischer Zeitbedarf, linearer Platzbedarf).

b) falsch

$L_1 := H$ nicht rekursiv

$L_2 := \emptyset$ rekursiv

$L_2 \subseteq L_1$

c) wahr

- $P \subseteq NP$ (jede DTM ist auch eine NTM)
- $L \in P \Rightarrow \overline{L} \in P \Rightarrow \overline{L} \in NP \Rightarrow L \in coNP$

$\Rightarrow P \subseteq coNP$

$\Rightarrow$ Beh.

d) falsch

01010 wird durch den ersten, nicht aber den zweiten regulären Ausdruck beschrieben

e) falsch

$L_1 = \{0^n 1^n 2^m \mid n, m \geq 0\}$ und

$L_2 = \{0^n 1^m 2^m \mid n, m \geq 0\}$ sind kontextfrei,

aber $L_1 \cap L_2 = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht kontextfrei