Prof. Dr. Benjamin Doerr, Dr. Reto Spöhel
Übungsleitung: Alexander Kobel

Wintersemester 2011/12

Test zu Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen

Test 3 **Serie 0** **keine Abgabe**

Aufgabe 1

Geben Sie zu jeder der nachstehenden Funktionen f_i eine *möglichst einfache Funktion* $g_i : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ an, so dass $f_i \in \Theta(g_i)$.

a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto \dfrac{5n^3 \log\log n + n \log n + n^2}{\log n + \log\log n + 37}$

b) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto \mathrm{e}^{n^2+2n-\frac{n+3}{n-4}+\frac{6}{n+2}}$

Aufgabe 2

Sei $A[1..15]$ ein Heap wie in der Vorlesung behandelt. Wir nehmen der Einfachkeit halber an, dass $A[1..15]$ lauter verschiedene Elemente enthält. Der *Rang* eines Elementes ist die Anzahl größerer Elemente plus eins; der Rang des größten Elementes ist also 1, derjenige des zweitgrößten 2, und so weiter.

a) An welchen Positionen kann das viertgrößte Element sein?

b) Was sind die möglichen Ränge für das Element an Position $A[15]$?

Aufgabe 3

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $t(n) \leq 37n$ für $n \leq 44$ und $t(n) \leq 5t(\lfloor n/7 \rfloor) + 17n$ für alle $n \geq 45$. Geben Sie eine möglichst gute obere Schranke der Form “$t(n) \leq cn$ für alle $n \in \mathbb{N}$” an. Kein Beweis notwendig.

Bitte wenden

Aufgabe 4

Kernidee des Select-Algorithmus war folgende: Man partitioniert das Eingabefeld beliebig in 5er-Gruppen, bestimmt (durch Sortieren) in jeder Gruppe den Median, bestimmt rekursiv den Median m dieser Mediane, und zeigt, dass m im Originalfeld ein Element der Ordnung q ist für ein $q \in [(3/10)n - 2, (7/10) + 3]$.

Im folgenden betrachten wir drei Varianten, das Element m zu berechnen. Bestimmen Sie zu jeder eine gute untere Schranke für die Ordnung q von m. Die Schranke soll von der Gestalt $q \geq cn - 100$ sein, wobei die Konstante c möglichst groß ist (die "-100" sind nur dazu da, dass Sie sich keine Gedanken machen müssen über Teilbarkeiten und kleine additive Reste). Für den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus wäre die Antwort also $q \geq (3/10)n - 100$. Kein Beweis etc. nötig. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass alle Elemente des Feldes verschieden sind.

Variante (a): Sie bilden 19er-Gruppen statt 5er-Gruppen und verfahren weiter wie oben.

Variante (b): Sie bilden 5er-Gruppen, wählen aus jeder 5er-Gruppe aber nicht den Median, sondern das Element der Ordnung 2 (also das zweitkleinste), und bestimmen m als Median dieser Elemente.

Variante (c): Sie bilden 5er-Gruppen, wählen aus jeder den Median, bestimmen aber das Element m nicht als Median der Mediane, sondern als Element der Ordnung $\lfloor 0.7 \lfloor n/5 \rfloor \rfloor$ unter den 5er-Medianen.