Prof. Dr. Benjamin Doerr, Dr. Reto Spöhel
Übungsleitung: Alexander Kobel

Wintersemester 2011/12

Übung zu Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen

http://www.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ws11/grads/

Übungsblatt 6 Abgabe: Donnerstag, 1. Dezember 2011, 12:00 Uhr

Hinweise zur Abgabe der Aufgaben: Schreiben Sie klar und deutlich in gebührendem Abstand zu weiterem Text Ihren **Namen** und **Matrikelnummer**, ihre **Übungsgruppe als arabische Ziffer** sowie den **Namen Ihres Tutors** auf Ihre Abgabe. **Heften** Sie mehrere Blätter geeignet zusammen. Legen Sie ihre Lösung bis zum Abgabetermin in den **unteren rechten Briefkasten** im Erdgeschoss von Gebäude E1 3 (neben Hörsaal 001). Achtung: Verwechseln Sie den Briefkasten nicht mit dem für die *Stammvorlesung* Algorithms and Data Structures!

Aufgabe 1 (*Schriftliche Übung, 2 Punkte*)

Wie in der Vorlesung gesehen, benötigt man mit dem naiven Ansatz (jeden Eintrag einzeln berechnen) $\Theta(n^3)$ arithmetische Operationen, um zwei $n \times n$-Matrizen miteinander zu multiplizieren.

a) Geben Sie die *exakte* Anzahl arithmetischer Operationen an, die der naive Ansatz benötigt, um zwei $n \times n$-Matrizen miteinander zu multiplizieren. [1P.]

b) Zeigen Sie per Induktion, dass diese Anzahl genau die in der Vorlesung diskutierte Laufzeitrekursion

$$T(n) = 8T(n/2) + n^2, \quad n > 1 \text{ eine Zweierpotenz}$$
$$T(1) = 1$$

erfüllt. [1P.]

Aufgabe 2 (*Schriftliche Übung, 5 Punkte*) Wenden Sie – falls möglich – das Master-Theorem an, um asymptotische Aussagen über die Lösungen der folgenden Rekursionen zu erhalten. (Geben Sie die resultierenden Funktionen jeweils in der einfachstmöglichen Form an.)

Falls das Master-Theorem nicht anwendbar ist, schreiben Sie dies einfach hin. Sie brauchen eine solche Rekursion nicht von Hand zu lösen.

Basisfall für alle Rekursionen sei $T_i(n) = 17$ für $n \leq 37$; nachfolgende Rekursionsgleichungen gelten jeweils für $n \geq 38$.

$$\begin{aligned}
T_1(n) &= 4\,T_1(\lceil n/3 \rceil) + 7n \\
T_2(n) &= 2\,T_2(\lceil n/3 \rceil) + 7n \\
T_3(n) &= 4\,T_3(\lceil n/2 \rceil) + 7n^2 \\
T_4(n) &= 3\,T_4(\lceil n/3 \rceil) + \lceil 7n \log n \rceil \\
T_5(n) &= 8\,T_5(\lceil n/4 \rceil) + \lceil 7n \,/\, \log n \rceil
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*Schriftliche Übung, 9 Punkte*)

Wir haben in der Vorlesung den Strassen-Algorithmus diskutiert, welcher nur $\Theta(n^{\log_2 7}) \subseteq O(n^{2.81})$ arithmetische Operationen statt der trivialen $\Theta(n^3)$ benötigt, um zwei $n \times n$-Matrizen miteinander zu multiplizieren. In dieser Aufgabe betrachten wir einen ähnlichen Algorithmus, der zwei *Polynome* mit weniger Operationen als auf den ersten Blick notwendig miteinander multipliziert.

Seien
$$p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$
und
$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$
zwei Polynome, jeweils gegeben durch ihre n Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ und $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$. Wir erlauben insbesondere auch $a_{n-1} = 0$ oder $b_{n-1} = 0$; der Grad der beiden Polynome ist also jeweils *höchstens* $n - 1$.

Das Polynom
$$r(x) := p(x) \cdot q(x)$$
hat Grad höchstens $2n - 2$; unser Ziel ist, seine $2n - 1$ Koeffizienten zu berechnen.

(Siehe nächste Seite. . .)

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie spätere Teilaufgaben z.T. auch lösen können, wenn Sie vorher irgendwo hängengeblieben sind.

a) Geben Sie eine explizite Formel für die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}$ von

$$r(x) =: c_{2n-2}x^{2n-2} + c_{2n-3}x^{2n-3} + \cdots + c_1 x + c_0$$

an. [1P.] Welche Grössenordnung an arithmetischen Operationen wird total benötigt, um alle diese Koeffizienten auf die offensichtliche Art jeweils einzeln zu berechnen? [1P.]

b) Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, dass n eine Zweierpotenz ist. Wir definieren die folgenden Polynome mit je $k := n/2$ Koeffizienten (d.h. vom Grad höchstens $k-1$):

$$\begin{aligned}
p_{\text{high}}(x) &= a_{n-1}x^{k-1} + a_{n-2}x^{k-2} + \cdots + a_{k+1}x + a_k \\
p_{\text{low}}(x) &= a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
q_{\text{high}}(x) &= b_{n-1}x^{k-1} + b_{n-2}x^{k-2} + \cdots + b_{k+1}x + b_k \\
q_{\text{low}}(x) &= b_{k-1}x^{k-1} + b_{k-2}x^{k-2} + \cdots + b_1 x + b_0
\end{aligned} \tag{1}$$

Drücken Sie erst $p(x)$ und $q(x)$ und dann $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ mit Hilfe dieser vier Polynome aus. [1P.] Zeigen Sie, dass die Multiplikation von $p(x)$ und $q(x)$ (d.h. die Berechnung der Koeffizienten $c_0, \ldots, c_{2n-2}$ von $r(x)$) zurückgeführt werden kann auf vier Multiplikationen von Polynomen mit $k = n/2$ Koeffizienten und $2n$ Additionen von einzelnen Koeffizienten. [2P.]

c) Die Überlegungen aus b) führen auf einen rekursiven Algorithmus zur Berechnung von $r(x)$. Beschreiben Sie diesen, und geben Sie eine Rekursion für die Anzahl der benötigten arithmetischen Operationen an. [1P.]

d) Benutzen Sie das Master-Theorem, um eine Aussage über die Anzahl Operationen zu erhalten, die Ihr Algorithmus benötigt, um zwei Polynome mit n Koeffizienten zu multiplizieren. [1P.]

e) Finden Sie einen Weg, im Rekursionsschritt mit nur *drei* Multiplikationen von Polynomen mit $k = n/2$ Koeffizienten auszukommen. Sie dürfen dafür statt $2n$ bis zu $100n$ Additionen einzelner Koeffizienten verwenden. [1P.]

f) Verwenden Sie wieder das Master-Theorem, um eine Aussage über die Anzahl Operationen zu erhalten, die der verbesserte Algorithmus benötigt, um zwei Polynome mit n Koeffizienten zu multiplizieren. [1P.]

Bonusaufgabe (*4 Bonuspunkte*)

Wir haben in die Vorlesung die für den dritten Fall des Master-Theorems notwendige Regularitätsbedingung diskutiert und angemerkt, dass diese für "vernünftige", d.h. in der Praxis auftretende Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eigentlich immer erfüllt ist. In dieser Aufgabe sehen wir ein (konstruiertes) Beispiel, bei dem diese Regularitätsbedingung nicht erfüllt ist, und die Konklusion des Master-Theorems tatsächlich nicht gilt.

Sei

$$f(n) := \begin{cases} n^3, & \text{falls } \log_2 n \text{ eine gerade ganze Zahl ist,} \\ n^2, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und sei $T(n)$ gegeben durch die Rekursion

$$\begin{aligned} &T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) + f(n), \quad n > 1, \\ &T(1) = 1. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie per Induktion, dass

$$T(n) = \begin{cases} (16n^3 + 10n^2 - 11n)/15, & \text{falls } n \text{ Zweierpotenz und } \log_2 n \text{ gerade,} \\ (4n^3 + 20n^2 - 11n)/15, & \text{falls } n \text{ Zweierpotenz und } \log_2 n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

[2P.]

b) Zeigen Sie, dass f die im dritten Fall des Master-Theorems auftretende Regularitäts-Bedingung nicht erfüllt. [1P.]

c) Zeigen Sie, dass das Master-Theorem falsch wird, wenn man die Regularitätsbedingung im dritten Fall weglässt. [1P.]

(Dieses Beispiel ist einem Vorlesungs-Skript von Vašek Chvátal entnommen, der es seinerseits einem seiner Studenten zuschreibt.)