Prof. Dr. Benjamin Doerr, Dr. Reto Spöhel
Übungsleitung: Alexander Kobel

Wintersemester 2011/12

Übung zu Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen

http://www.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ws11/grads/

Übungsblatt 9 Abgabe: Donnerstag, 22. Dezember 2011, 12:10 Uhr

Hinweise zur Abgabe der Aufgaben: Schreiben Sie klar und deutlich in gebührendem Abstand zu weiterem Text Ihren **Namen** und **Matrikelnummer**, ihre **Übungsgruppe als arabische Ziffer** sowie den **Namen Ihres Tutors** auf Ihre Abgabe. **Heften** Sie mehrere Blätter geeignet zusammen. Legen Sie ihre Lösung bis zum Abgabetermin in den **unteren rechten Briefkasten** im Erdgeschoss von Gebäude E1 3 (neben Hörsaal 001).

Aufgabe 1 (*Schriftliche Übung, 3 Punkte*)

Lesen Sie den Beweis von Lemma 7.2 im Skript, und lösen Sie dann folgende Aufgaben. Wenn wir im folgenden von der Höhe eines AVL-Baums sprechen, berücksichtigen wir wie im Skript die virtuellen Blätter jeweils mit.

a) Beweisen Sie (z.B. per Induktion), dass ein AVL-Baum mit n inneren Knoten genau $n+1$ virtuelle Blätter hat. [1P.]

b) Beweisen Sie, dass ein AVL-Baum der Höhe h mindestens F_{h+2} viele Blätter hat, wobei F_{h+2} die $(h+2)$-te Fibonacci-Zahl wie im Skript definiert ist. (Beachten Sie, dass dies eine stärkere Aussage als die im Skript gemachte ist. Geben Sie das vollständige Argument, nicht nur ein „Diff zum Skript“.) [1P.]

c) Zeichnen Sie einen AVL-Baum der Höhe 5, der genau $F_7 = 13$ virtuelle Blätter hat [1P.]

Aufgabe 2 (*Schriftliche Übung, 2 Punkte*)

Seien $\phi_+ := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\phi_- := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Zeigen Sie, dass für beliebige reelle Zahlen A und B die Folge

$$x_n := A \cdot (\phi_+)^n + B \cdot (\phi_-)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

die Rekursion

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

erfüllt.

Leiten Sie daraus die Formel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

für die n-te Fibonacci-Zahl ab.

Aufgabe 3 (*Schriftliche Übung, 5 Punkte*)

In dieser Aufgabe befassen wir uns mit einigen Details der in Kapitel 7.2 im Skript gemachten Überlegungen.

a) Figur 7.2 auf S. 49 zeigt den Effekt einer Links-Doppelrotation. In der Bildlegende steht, dass diese Doppelrotation aufgefasst werden kann als eine Folge von zwei einfachen Rotationen wie in Figur 7.1. Verifizieren Sie dies, indem Sie den Baum nach der ersten der beiden einfachen Rotationen skizzieren. [1P.]

Im folgenden betrachten wir das Einfügen eines Knotens in einen AVL-Baum wie in Abschnitt 7.2.2 beschrieben. Wir verwenden die Notationen aus dem Skript; insbesondere ist y ein Knoten, in dessen Subbaum das neue Element eingefügt worden ist, und x ist der Vater von y. In der Vorlesung haben wir angenommen, dass y das *rechte* Kind von x ist, und drei Hauptfälle unterschieden: nach Anpassung von $\mathrm{Bal}(x)$ gilt $\mathrm{Bal}(x) = 0$, $\mathrm{Bal}(x) = -1$, oder $\mathrm{Bal}(x) = -2$. Nur im letzten dieser drei Fälle ist die AVL-Bedingung lokal verletzt, und wir müssen dies durch eine geeignete Rotation beheben. Mit diesem Fall befassen wir uns im Folgenden.

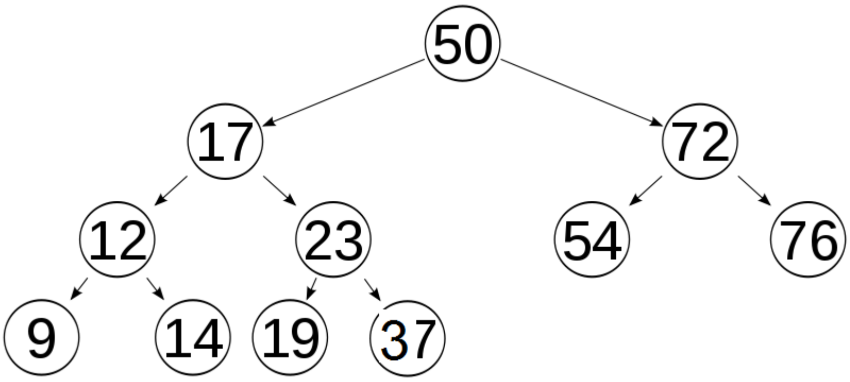
b) Begründen Sie, warum wir im Fall $\mathrm{Bal}(x) = -2$ wissen, dass $\mathrm{Bal}(y) = -1$ oder $\mathrm{Bal}(y) = 1$ gilt. (Dies haben wir auch in der Vorlesung diskutiert.) [1P.]

Von diesen beiden Subfällen haben in der Vorlesung nur den Subfall $\mathrm{Bal}(y) = -1$ betrachtet, bei dem eine einfache Rotation genügt. (Beachten Sie hierzu auch die Errata zum Skript!) Im folgenden befassen wir uns mit dem verbleibenden Subfall $\mathrm{Bal}(y) = 1$, der eine Doppelrotation erfordert.

c) Illustrieren Sie mit Bildern diesen verbleibenden Fall. Die Tabelle auf S. 48 unten ist dabei hilfreich. Beachten Sie, dass die 'or'-Angaben in der Tabelle sich auf zwei (nahezu symmetrische) Subsubfälle beziehen – entscheiden Sie sich für *einen* dieser beiden Subsubfälle und malen Sie ihn sauber hin. [2P.]

d) Begründen Sie, warum wir nach Ausführung der Doppelrotation fertig sind, d.h. wissen, dass die AVL-Eigenschaft für alle Vorfahren von x, y und z gilt. [1P.]

Aufgabe 4 (*Schriftliche Übung, 2 Punkte*)



[Quelle: Wikipedia, leicht modifiziert]

Beantworten Sie folgende Fragen für den skizzierten AVL-Baum.

a) Wie sieht der (ggf. rebalancierte) AVL-Baum aus, nachdem der Key 15 eingefügt wurde?

b) Wie sieht der (ggf. rebalancierte) AVL-Baum aus, nachdem der Key 33 eingefügt wurde? (In den ursprünglichen Baum; 15 ist in diesem Fall also nicht vorher eingefügt.)

Die folgende Aufgabe hat nichts mit Suchbäumen zu tun, sondern betrifft ganz allgemein algorithmisches Denken. Die Lösung ist elementar, aber nicht trivial ;-)

Aufgabe 5 (*Schriftliche Übung, 4 Punkte*)

Gegeben sei eine Folge von ganzen (d.h. positiven und negativen) Zahlen, gespeichert in einem Array $A[1..n]$.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n^2)$ ein Indexpaar (i, j) mit $1 \leq i \leq j \leq n$ findet, für welches die Summe $\sum_{k=i}^{j} A[k]$ maximal wird. [1P.]

b) Finden Sie einen Algorithmus, der dasselbe in Zeit $O(n)$ tut. [3P.]

Beschreiben Sie Ihre Algorithmen präzise und begründen Sie ihre Korrektheit. (Es gibt keine Punkte für kryptischen Pseudocode ohne Erklärung!)