Prof. Dr. Benjamin Doerr, Dr. Reto Spöhel
Übungsleitung: Alexander Kobel

Wintersemester 2011/12

Übung zu Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen

http://www.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ws11/grads/

Übungsblatt 10 Abgabe: Donnerstag, 12. Januar 2011, 12:10 Uhr

Hinweise zur Abgabe der Aufgaben: Schreiben Sie klar und deutlich in gebührendem Abstand zu weiterem Text Ihren **Namen** und **Matrikelnummer**, ihre **Übungsgruppe als arabische Ziffer** sowie den **Namen Ihres Tutors** auf Ihre Abgabe. **Heften** Sie mehrere Blätter geeignet zusammen. Legen Sie ihre Lösung bis zum Abgabetermin in den **unteren rechten Briefkasten** im Erdgeschoss von Gebäude E1 3 (neben Hörsaal 001).

Aufgabe 1 (*Schriftliche Übung, 6 Punkte*) Sei H ein allgemeiner baumbasierter min-heap, das heißt, H ist ein Baum mit Wurzel r, mit Kotenmenge V, und einer Funktion key : $V \to \mathbb{R}$, die die heap-Eigenschaft erfüllt (wenn u ein Kind von v ist, dann ist $\text{key}(u) \geq \text{key}(v)$). An jedem Knoten v sind gespeichert

- $\text{parent}(v)$: der Vater von v
- $\text{degree}(v)$: die Zahl der Kinder von v
- $\text{child}(v, 1), \ldots, \text{child}(v, \text{degree}(v))$: die Kinder von v

Sei h die Tiefe von H und d der maximale Knotengrad (d.h., die maximale Zahl an Kindern, die ein Knoten aus V besitzt).

a) Gegen Sie in Pseudopseudocode eine Prozedur an, die in Zeit $O(h)$ den key eines gegebenen Knotens v auf den Wert k erniedrigt und die Heap-Eigenschaft wiederherstellt. Ist $k \geq \text{key}(v)$, so soll die Prozedur nichts tun. Die Struktur des Baumes soll sich nicht ändern. [2P]

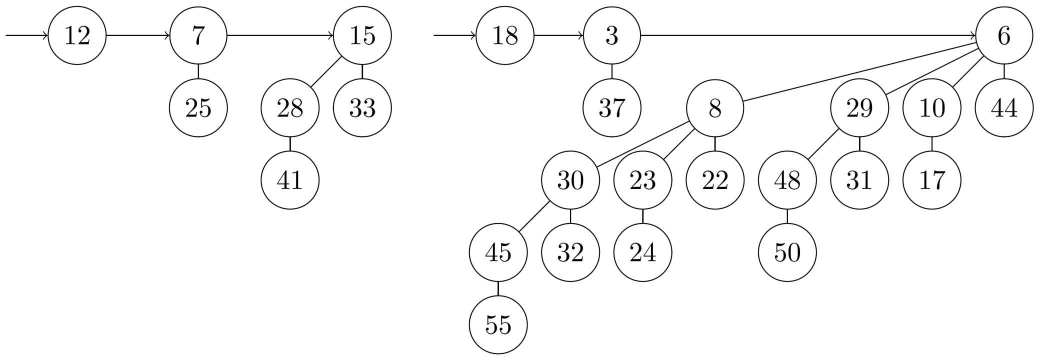
b) Beschreiben Sie informell, wie sie a) nutzen können, um eine sinnvolle Insert-Prozedur zu implementieren. [1P]

c) Gegen Sie in Pseudopseudocode eine Prozedur an, die in Zeit $O(dh)$ den key eines gegebenen Knotens v auf den Wert k erhöht und die Heap-Eigenschaft wiederherstellt. Ist $k \leq \text{key}(v)$, so soll die Prozedur nichts tun. Die Struktur des Baumes soll sich nicht ändern. [2P]

d) Beschreiben Sie informell, wie sie c) nutzen können, um ein Delete zu implementieren. [1P]

Aufgabe 2 (*Schriftliche Übung, 2 Punkte*)

Vereinigen Sie die folgenden Binomial-Heaps.



Aufgabe 3 (*Schriftliche Übung, 4 Punkte*)

Geben Sie eine Methode Binomial_Heap_Decrease_Key$(H; x; k)$ an, die in einem Binomial-Heap H den Schlüssel von Knoten x auf k vermindert. Falls $\text{key}(x) < k$, soll H nicht verändert werden. Die Laufzeit soll $O(\log n)$ sein, wobei n die Anzahl der Knoten in H ist.

Notieren Sie die Methode in sauberem Pseudocode, der genau die Repräsentation wie im Skript beschrieben nutzt (Sie müssen sich also zunächst mit der left-child-right-sibling-Repräsentation vertraut machen, da diese in der Vorlesung nicht vorgestellt wurde). Sie dürfen natürlich nicht die Delete-Prozedur verwenden (da diese auf die Decrease_Key-Prozedur aufbaut).

Aufgabe 4 (*Schriftliche Übung, 6 Punkte (beinhaltet also 2 Bonuspunkte)*) Ein 2-3-4-Heap ist ein Baum, dessen Knoten folgenden Bedingungen genügen:

- Jeder Knoten ist entweder ein Blatt oder aber ein interner Knoten, der zwei, drei oder vier Kinder hat. Ausnahme: die Wurzel darf auch nur ein Kind haben.
- Alle Blätter haben die gleiche Tiefe.
- Ist x ein Blatt, so enthält x einen Schlüssel, $\text{key}(x)$.
- Ist x ein interner Knoten, so enthält x einen Wert $\text{small}(x)$. Dies ist der kleinste Wert, der in den Blättern unterhalb von x gespeichert ist.

Beschreiben Sie, wie man auf 2-3-4-Heaps folgende Operationen implementieren kann, so dass sie in Zeit $O(\log n)$ durchgeführt werden können, wobei n die Anzahl aller Knoten in H bzw. in H_1 und H_2 zusammen ist.

a) Insert$(H; x; k)$ – fügt Knoten x als Blatt mit Wert k in 2-3-4-Heap H ein. [2P]

b) Delete$(H; x)$ – löscht Blatt x aus dem 2-3-4-Heap H. [2P]

c) Extract_Min(H) – entnimmt das Blatt mit dem kleinsten Wert aus H. [1P]

d) Union$(H_1; H_2)$ – erzeugt einen neuen 2-3-4-Heap, der die Werte von H_1 und H_2 enthält. H_1 und H_2 werden dabei zerstört. [1P]

Hinweis: Beim Einfügen könnte man Knoten auf dem Pfad von der Wurzel zum Blatt, die schon vier Kinder haben, „aufspalten“.