Prof. Dr. Benjamin Doerr, Dr. Reto Spöhel **Wintersemester 2011/12**
Übungsleitung: Alexander Kobel

Übung zu Grundzüge von Algorithmen und Datenstrukturen

http://www.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ws11/grads/

Übungsblatt 11 Abgabe: Donnerstag, 19. Januar 2011, 12:10 Uhr

Hinweise zur Abgabe der Aufgaben: Schreiben Sie klar und deutlich in gebührendem Abstand zu weiterem Text Ihren **Namen** und **Matrikelnummer**, ihre **Übungsgruppe als arabische Ziffer** sowie den **Namen Ihres Tutors** auf Ihre Abgabe. **Heften** Sie mehrere Blätter geeignet zusammen. Legen Sie ihre Lösung bis zum Abgabetermin in den **unteren rechten Briefkasten** im Erdgeschoss von Gebäude E1 3 (neben Hörsaal 001).

Aufgabe 1 (*Schriftliche Übung, 2 Punkte*)

Im Skript ist eine *rekursive* Pseudocode-Implementierung der Tiefensuche gegeben. Geben Sie eine alternative Pseudocode-Implementierung der Tiefensuche an, die statt Rekursion einen expliziten *Stack* verwendet. (Orientieren Sie sich dabei an der im Skript gegebenen Implementierung der Breitensuche mittels einer Queue; Sie dürfen sich auf das Durchsuchen *einer* Zusammenhangskomponente beschränken.)

Aufgabe 2 (*Schriftliche Übung, 3 Punkte*)

Beweisen Sie folgende stärkere Version von Lemma 12.2 im Skript:

Lemma. Beim Ausführen der Breitensuche auf einem Graphen $G = (V, E)$ gilt für alle $i \geq 0$ folgendes:

- Direkt nachdem der letzte Knoten der Menge U_i aus der Queue genommen und abgearbeitet wird, enthält die Queue genau die Knoten der Menge U_{i+1}.
- Jeder Knoten $u \in U_{i+1}$ wird von einem Knoten $v \in U_i$ her „entdeckt“ und in die Queue eingereiht.

Aufgabe 3 (*Schriftliche Übung, 3 Punkte*) Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$, der das Straßennetz einer Stadt darstellt. Jede Kante hat Länge 1; längere Straßen werden einfach durch Aneinanderreihen von mehreren Kanten modelliert. Weiter sei eine Menge $V' \subseteq V$ gegeben, die die Standorte der Postämter in der Stadt darstellt.

Geben Sie einen Algorithmus an, der in Laufzeit $O(|V| + |E|)$ für *alle* Knoten den Abstand zum jeweils nächstliegenden Postamt berechnet.

Sie brauchen keinen formalen Korrektheits- oder Laufzeitbeweis zu führen – beschreiben Sie einfach ihren Algorithmus in einem kurzen und präzisen Text, und äußern Sie sich mit je 1-2 Sätzen zu Korrektheit und Laufzeit.

Aufgabe 4 (*Schriftliche Übung, 5 Punkte (beinhaltet 2 Bonuspunkte)*) Sei A die Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ Knoten.

a) Überlegen Sie sich, was für gegebenes $k \geq 2$ die kombinatorische Interpretation der Einträge der potenzierten Matrix A^k ist. Begründen Sie Ihre Antwort. [3P.]

b) Leiten Sie daraus einen Algorithmus ab, der die Anzahl Dreiecke in G in Zeit $O(n^{\log_2 7}) \subseteq O(n^{2.81})$ exakt bestimmt. [2P.]

   (Ein Dreieck ist ein Tripel $\{a, b, c\} \subseteq V$ mit $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\} \subseteq E$. Der Graph G enthält also zwischen 0 und $\binom{n}{3}$ viele Dreiecke, und es ist trivial, diese durch Enumeration in Zeit $O(\binom{n}{3}) = O(n^3)$ zu zählen.)

Aufgabe 5 (*Schriftliche Übung, 7 Punkte (beinhaltet 2 Bonuspunkte)*)

In dieser Aufgabe betrachten wir *gerichtete* Graphen $G = (V, E)$ wie im Skript beschrieben. $E \subseteq V \times V$ ist hier also eine Menge von *gerichteten* Kanten.

Eine *topologische Ordnung* eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Nummerierung der Knoten $f : V \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\forall (u, v) \in E : f(u) < f(v).$$

o) Geben Sie ein einfaches Beispiel eines gerichteten Graphen an, der *keine* topologische Ordnung hat. [0P.]

a) Überlegen Sie sich ein Beispiel eines in der echten Welt auftretenden gerichteten Graphen, bei dem das Konzept einer topologischen Ordnung wichtig ist (d.h. eine natürliche Interpretation hat). [1P.]

Eine *Senke* in einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist ein Knoten $v \in V$ ohne ausgehende Kante, d.h. ein Knoten, für den die Menge $\{(v, u) \mid u \in V \text{ und } (v, u) \in E\}$ leer ist. Für $v \in V$ bezeichnen wir mit $G \setminus \{v\}$ den Graphen, den man durch Entfernen von v und von allen v enthaltenden Kanten erhält.

b) Beweisen Sie:

Lemma. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $v \in V$ eine Senke in G. Eine topologische Ordnung f von $G \setminus \{v\}$ mit $f : V \setminus \{v\} \to \{1, \ldots, |V| - 1\}$ bildet zusammen mit der Zuweisung $f(v) := |V|$ eine topologische Ordnung von G. [2P.]

c) Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(|V| + |E|)$ eine topologische Ordnung eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ findet oder feststellt, dass keine solche existiert. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus. [4P.]

Hinweis: Lassen Sie sich von b) inspirieren, und verwenden Sie eine geeignete Variante der Tiefensuche.