

# Algorithmische Spieltheorie

Kurt Mehlhorn

February 4, 2013

## 1 Einleitung

Die Wirtschaftswissenschaften modellieren Marktteilnehmer als rational und eigennützig. In dem Teilgebiet Spieltheorie wird rationales eigennütziges Verhalten systematisch studiert.

In die Informatik hat die Spieltheorie mit dem Internet Einzug gehalten. Bei Internetaktionen, Wettbewerb um Bandbreiten, und vielen anderen Gegebenheiten ist es zielführend die Teilnehmer, oft Spieler genannt, als eigennützig zu modellieren.

Es stellen sich dann mehrere Fragen:

- Welche Art von Gleichgewichten stellen sich ein? Hier ist das Konzept des Nash-Gleichgewichts ein zentraler Begriff.
- Wie weit können Gleichgewichte vom sozialen Optimum abweichen, dass man durch globale Steuerung erreichen könnte. Wir werden dazu den Begriff des Preises der Anarchie (Price of Anarchy) einführen.
- Kann man Spielregeln aufstellen, die sicherstellen, dass sich trotz des Eigennutzes der Marktteilnehmer ein Gleichgewicht einstellt, das nahe am sozialen Optimum ist.

## 2 Versteigerungen

In einer Auktion (Versteigerung) wird der Käufer eines Guts bestimmt. Bis vor wenigen Jahren kannten die meisten Menschen Auktionen nur aus der Zeitung (Kunstmarkt). In den letzten 10 Jahren hat sich das stark geändert. Durch Ebay und ähnliche Firmen sind Auktionen teil unseres Alltags geworden. Indirekt sehen wird das Ergebnis einer Versteigerung bei jeder Benutzung von Google. Die Anzeigenplätze über den und in der Spalte rechts neben den Suchergebnissen werden versteigert. Diese Versteigerung findet in den Millisekunden der Bearbeitung der Suchanfrage statt. Die Bieter haben vorher Angebote für verschiedene Schlagworte abgegeben.

Es gibt verschiedene Arten von Auktionen. Sie unterscheiden sich danach, wie der Gewinner und der vom Gewinner zu zahlende Preis bestimmt wird. Die wichtigsten Arten sind:

**Englische Auktion:** Diese Art der Auktion herrscht vor in Versteigerungshäusern. Die Teilnehmer konkurrieren offen miteinander. Sie geben nacheinander Gebote ab, wobei jedes Gebot höher sein muss als das bisherige Höchstgebot. Die Gebote werden entweder von dem Versteigerer angefordert oder von den Teilnehmern selbst abgegeben. Meist gibt es eine minimale Marge, um die ein neues Gebot das bisherige Höchstgebot übertreffen muss. Wird kein neues Höchstgebot abgegeben, so wird die Auktion beendet, der Höchstbietende gewinnt und bezahlt sein Höchstgebot.

**Holländische Versteigerung:** Der Auktionär beginnt mit einem Preisaufruf, den sicher kein Teilnehmer bezahlen will. Er reduziert dann den geforderten Preis solange, bis ein Teilnehmer den genannten Preis zu Zahlen bereit ist.

**Höchstangebot mit versiegelten Geboten:** Jeder Teilnehmer gibt ein Gebot in einem versiegelten Umschlag ab. Das Höchstgebot gewinnt und der Gewinner zahlt das Höchstgebot.

Öffentliche Aufträge werden oft nach diesem Schema vergeben. Natürlich gewinnt das niedrigste Angebot.

**Vickrey Auktion (Second-Price Auction):** Wiederum werden Gebote in versiegelten Umschlägen abgegeben. Der Höchstbietende gewinnt, er bezahlt aber nur in Höhe des zweithöchsten Gebots.

Ebay ist eine Mischung aus Englischer und Vickrey Auktion. Die Teilnehmer geben Gebote ab; sie können wiederholt Gebote abgeben. Das jeweilige Höchstgebot bleibt geheim und das zweithöchste Gebot plus ein kleines Inkrement ist öffentlich. Am Schluss gewinnt der Höchstbietende, er bezahlt aber nur das zweithöchste Gebot plus ein kleines Inkrement.

Die Vickrey Auktion hat sehr schöne theoretische Eigenschaften. Dazu später mehr.

**Gleichzeitige Versteigerung mehrerer Güter:** Ein Beispiel dafür ist die Versteigerung der UMTS-Lizenzen im Jahre 2000. 12 Frequenzblöcke wurden versteigert. Ein Teilnehmer musste mindestens zwei und höchstens drei Frequenzblöcke ersteigern. Die Anzahl der Gewinner würde also zwischen vier und sechs liegen.

Eine erste Versteigerung fand zwischen dem 31. Juli und dem 18. August 2000 in den Räumen der damaligen Regulierungsbehörde für Telekommunikation und Post (RegTP; heute: Bundesnetzagentur) in Mainz statt. Erlöst wurden insgesamt etwa 50,8 Milliarden Euro, was im Anschluss auch einen Geldsegen für die deutsche Forschung mit sich brachte.

Die Regeln waren einfach: Solange es noch mehr als 7 Bieter gab oder jemand drei Blöcke ersteigern wollte, wurde der Preis pro Block weiter erhöht. Am 12. August 2000 reduzierte sich die Anzahl der Bieter auf 6 bei einem Gesamtpreis von knapp unter 63 Milliarden DM (32,2 Milliarden EUR). Einige der verbleibenden Bieter boten weiter auf drei Blöcke, um die Anzahl der Lizenznehmer zu reduzieren. Erst am 18. August beschränkten sich alle Auktionsteilnehmer auf Gebote auf jeweils zwei Frequenzblöcke, wodurch die Versteigerung beendet wurde.

## 2.1 Vickrey Auktion

Es wird ein Gut versteigert. Dieses Gut gibt es nur einmal; es finden also nicht wiederholte Versteigerungen für das gleiche Gut statt. Jeder Bieter gibt ein Gebot ab. Der Höchstbietende gewinnt und bezahlt das zweithöchste Gebot. Wird das Höchstgebot mehrmals abgegeben, so entscheidet das Los. Jede andere Tie-breaking Regel tut auch.

Jeder Teilnehmer  $i$  hat eine Vorstellung  $u_i$  vom Wert des Gutes, die nur er selbst kennt. Er gibt ein Gebot  $b_i$  ab. Welches Gebot sollte er abgeben? Jeder Teilnehmer versucht seinen Nutzen zu maximieren. Der Nutzen für den  $i$ -ten Teilnehmer ist Null, falls er die Auktion nicht gewinnt (da er nichts bezahlt und nichts bekommt). Er ist

$$u_i - \text{bezahlter Preis,}$$

falls er die Auktion gewinnt.

Es ist unvernünftig, ein Gebot  $b_i > u_i$  abzugeben, da der Teilnehmer  $i$  damit riskiert mehr zu bezahlen, als das Gut ihm wert ist. Das wird der Fall sein, wenn sein Gebot das höchste ist und auch das zweithöchste Gebot größer ist als  $b_i$ . Falls er mit einem Gebot  $b_i > u_i$  gewinnt, dann hätte er auch mit dem Gebot  $b_i$  gewonnen.

Es ist ebenfalls unvernünftig, ein Gebot  $b_i < u_i$  abzugeben. Vergleichen wir das Ergebnis mit einem Gebot  $b'_i = u_i$ . Das letzter Gebot erhöht die Gewinnaussichten. Im Fall eines Gewinns ändert sich der Preis aber nicht, da der Preis nicht vom eigenen Gebot abhängt.

Diese Überlegungen zeigen, dass das Gebot  $b_i = u_i$  den Nutzen in keinem der beiden Fälle reduziert. Am vernünftigsten ist also das Gebot  $b_i = u_i$  abzugeben. Wir vermeiden damit Überzahlung (negativer Nutzen) und maximieren unsere Gewinnaussichten. Im Fall der erfolgreichen Teilnahme erzielen wir den Nutzen.

$u_i$  – zweithöchstes Gebot.

Die Regeln der Vickrey Auktion haben also die schöne Eigenschaft, dass ein wahrheitsgemäßes Bieten das optimale Verhalten ist.

Eine alternative Analyse ist wie folgt: Wir vergleichen das Gebot  $b_i = u_i$  mit einem Gebot  $b'_i$ .  
beide Gebote gewinnen: dann muss  $u_i$  höher als das zweithöchste Gebot sein und wir erzielen mit beiden Geboten den gleichen Nutzen. Dieser Nutzen ist positiv.

beide Gebote verlieren: dann ist der Nutzen in beiden Fällen gleich Null.  
das Gebot  $b_i = u_i$  gewinnt, aber  $b'_i$  verliert. Dann kann es kein Gebot über  $u_i$  geben. Das Gebot  $u_i$  erreicht als einen nichtnegativen Nutzen, aber das Gebot  $b'_i$  erzielt den Nutzen Null.

das Gebot  $b_i = u_i$  verliert, aber das Gebot  $b'_i$  gewinnt. Dann muss es ein zweites Gebot geben, das mindestens die Höhe  $u_i$  hat. Das Gebot  $b'_i$  hat also keinen positiven Nutzen, während das Gebot  $u_i$  den Nutzen Null hat.

In allen vier Fällen ist der Nutzen bei dem Gebot  $u_i$  mindestens so groß wie der Nutzen beim Gebot  $b'_i$ . Es ist also vernünftig  $u_i$  zu bieten.

Wenn KM an einer einmaligen eBay Auktion teilnimmt, gibt er das Gebot  $u_i$  ab und beobachtet die Auktion nicht. Für Güter, die oft angeboten werden, verhält er sich anders. Dort gibt er kurz vor Ende der Auktion ein Gebot ab, das deutlich unter  $u_i$  liegt. Nach jedem Misserfolg steigert es sein Gebot bei der nächsten Auktion.

## 2.2 Mechanism Design

Die Vickrey Auction ist ein Beispiel für den Entwurf von Spielregeln, so dass wahrheitsgemäßes Verhalten der Marktteilnehmer für jeden Marktteilnehmer optimal ist. Es gibt keinen Grund sich strategisch zu verhalten.

Erwähne hier Wahlsysteme.

## 3 Nash Gleichgewichte und Verkehrsflüsse

Im Straßenverkehr gibt es viele Teilnehmer. Jeder Teilnehmer wählt seine Route so, dass er glaubt, möglichst schnell ans Ziel zu kommen. Jeder Teilnehmer fällt diese Entscheidung für sich. Es gibt keine Absprache zwischen den Teilnehmern. Die Erfahrungen am Tag  $n$  haben aber Einfluss auf das Verhalten am Tag  $n + 1$ .

Wir machen für unsere Diskussion folgende Annahmen. Die Fahrzeit über eine Straße hängt von der Verkehrsdichte auf der Straße ab. Die Fahrzeit über eine Straße ist eine nichtfallende Funktion der Autos, die die Straße benutzen.

Konkret nehmen wir an, dass die Fahrzeit über eine Straße eine lineare Funktion des Verkehrsaufkommens ist.

$$\text{Fahrzeit} = a + b \cdot \text{Anzahl der Autos}$$

Für die weitere Diskussion benutze den Wikipedia Artikel zu dem Paradox von Braess.

**Lokale Optimierung führt zu einem Nashgleichgewicht** Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Situation (hier Verkehrsfluss), in der sich kein Teilnehmer verbessern kann, indem er sein Verhalten ändert, während alle anderen Teilnehmer bei ihrer Strategie bleiben. Falls es also eine bessere Situation gibt, dann müssen mehrere Teilnehmer gleichzeitig ihr Verhalten ändern, um es zu erreichen.

Beim Problem des Verkehrsflusses gibt es eine natürliche Strategie, um ein Nashgleichgewicht zu erreichen: lokale Optimierung (Best Response). Wenn der augenblickliche Fluss kein Nashgleichgewicht ist, dann gibt es mindestens einen Teilnehmer, der sich verbessern kann. Wir wählen einen (!!!) dieser Teilnehmer und er ändert sein Verhalten.

Für diesen einen Teilnehmer hat sich die Situation dadurch verbessert. Seine Verhaltensänderung hat aber unter anderen auch zu einer Verschlechterung bei anderen Teilnehmern geführt, da auf der neuen Route des Teilnehmers der Verkehr gewachsen ist. Es ist also keineswegs klar, dass sich jemals ein stabiler Zustand ergibt.

**Theorem 1** Bei Verkehrsflüssen führt Best Response zu einem Nashgleichgewicht.

**Proof:** Wir führen das Konzept des Potentials eines Flusses ein und zeigen erstens, dass das Potential nie negativ werden kann, und zweitens dass jeder Best Response Zug das Potential verringert.

Sei  $f$  ein Fluss. Für eine Kante  $e$  sei  $f_e$  die Anzahl der Autos, die die Kante  $e$  benutzen, und sei  $\ell_e(x) = a_e f_e + b_e$  mit  $a_e, b_e \geq 0$  die Fahrzeitfunktion für die Kante  $e$ . Dann definieren wir das Potential  $P(f)$  des Flusses  $f$  als

$$P(f) = \sum_e (\ell_e(1) + \ell_e(2) + \dots + \ell_e(f_e)).$$

Nehmen wir nun, dass es einen Fahrer gibt, der im Augenblick den Weg  $p$  benutzt und für den es sich lohnt zum Weg  $q$  zu wechseln.

Wenn  $e$  eine Kante von  $p$  ist, dann erfährt der Fahrer auf dieser Kante die Verzögerung  $\ell_e(f_e)$ . Also ist  $T = \sum_{e \in p} \ell_e(f_e)$  gerade die augenblickliche Fahrzeit des Fahrers. Wenn er zu  $q$  wechselt, dann wird seine Fahrzeit  $T' = \sum_{e \in q} \ell_e(f_e + 1 - \delta_{e,p})$ , wobei  $\delta_{e,p} = 1$ , falls  $e$  zu  $p$  gehört und  $\delta_{e,p} = 0$  sonst. Da es sich lohnt zu wechseln, gilt  $T' < T$ . Sei  $f'$  der Fluss nach dem Wechseln. Dann gilt gerade

$$P(f') = P(f) - T + T',$$

d.h., jeder best response Zug verringert das Potential.

Das Potential ist nach Definition nie negativ. ■

**Der Preis der Anarchie** Wir stellen uns nun die Frage, um wieviel die Kosten (= Gesamtfahrzeit aller Fahrer) in einem Nashgleichgewicht über den optimalen Kosten liegen können.

Sei also  $f$  ein Nashgleichgewicht und sei  $f^*$  ein Fluss geringster Gesamtfahrzeit. Die Gesamtfahrzeit eines Flusses berechnet sich als

$$C(f) = \sum_e \ell_e(f_e) f_e,$$

wobei  $x_e^f$  die Anzahl der Fahrer ist, die die Kante  $e$  benutzen. Beachte, dass jeder dieser Fahrer  $h_e(f_e)$  Zeiteinheiten braucht, um die Kante  $e$  zu durchqueren.  $M$

**Theorem 2** Sei  $f$  ein Nashgleichgewicht und sei  $f^*$  ein Fluss geringster Kosten. Dann gilt

$$C(f) \leq \frac{4}{3} \cdot C(f^*).$$

Die Gesamtkosten des Nashgleichgewichts sind damit höchstens doppelt so hoch wie beim Optimum.

**Proof:** Um den Beweis einfach zu halten, beweisen wir nur den Faktor  $8/3$ .

Sei  $n$  die Anzahl der Autos. Für das Auto  $i$ , sei  $p_i$  der Weg im Fluss  $f$  und sei  $q_i$  der Weg im Fluss  $f^*$ . Dann gilt

$$C(f) = \sum_e \ell_e(f_e) f_e = \sum_i \sum_{e \in p_i} \ell(f_e) \quad \text{und} \quad C(f^*) = \sum_e \ell_e(f_e^*) f_e^* = \sum_i \sum_{e \in q_i} \ell(f_e^*).$$

Beachte, dass in der Summe  $\sum_i \sum_{e \in p_i} \ell(f_e)$  der Term  $\ell(f_e)$  gerade  $f_e$  mal vorkommt. Wir schätzen nun ab:

$$\begin{aligned} C(f) &= \sum_e \ell_e(f_e) f_e \\ &= \sum_i \sum_{e \in p_i} \ell(f_e) \\ &\leq \sum_i \sum_{e \in q_i} \ell(f_e + 1) \\ &= \sum_e \ell_e(f_e + 1) f_e^* \\ &= \sum_e (\ell_e(f_e + 1) - \ell(f_e)) f_e^* + \sum_e (\ell_e(f_e) - \ell(f_e^*)) f_e^* + \sum_e \ell_e(f_e^*) f_e^*, \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichung daraus folgt, dass in der Summe  $\sum_i \sum_{e \in p_i} \ell(f_e)$  der Term  $\ell(f_e)$  gerade  $f_e$  mal vorkommt, die Ungleichung davon folgt, dass  $f$  ein Nashgleichgewicht ist und es sich daher für das  $i$ -te Auto nicht lohnen darf vom Weg  $p_i$  auf den Weg  $q_i$  zu wechseln, die zweite Gleichung daraus folgt, dass in der Summe  $\sum_i \sum_{e \in q_i} \ell(f_e + 1)$  der Term  $\ell(f_e + 1)$  gerade  $f_e^*$  mal vorkommt, und die letzte Gleichung aus  $\ell_e(f_e + 1) = \ell_e(f_e + 1) - \ell_e(f_e) + \ell_e(f_e) - \ell_e(f_e^*) + \ell_e(f_e^*)$  folgt.

Wir betrachten nun die drei Glieder der Summe nacheinander. Das letzte Glied ist gleich  $C(f^*)$ . Für das erste Glied gilt

$$\sum_e (\ell_e(f_e + 1) - \ell(f_e)) f_e^* = \sum_e a_e f_e^* \leq \sum_e \ell_e(f_e^*) f_e^* \leq C(f^*).$$

Für das mittlere Glied  $\sum_e (\ell_e(f_e) - \ell(f_e^*)) f_e^*$  beobachten wir zunächst, dass wir alle Summanden mit  $f_e \leq f_e^*$  weglassen; sind bringen keinen positiven Beitrag. Wir müssen also nur Summanden mit  $f_e > f_e^*$  betrachten. Dafür betrachten wir die Zeichnung 1. Sie liefert

$$(\ell_e(f_e) - \ell(f_e^*)) f_e^* \leq \frac{1}{4} \cdot \ell_e(f_e) f_e \quad \text{falls } f_e \geq f_e^*.$$

Also gilt

$$\sum_e (\ell_e(f_e) - \ell(f_e^*)) f_e^* \leq \frac{1}{4} \sum_e \ell_e(f_e) f_e = \frac{1}{4} \cdot C(f).$$

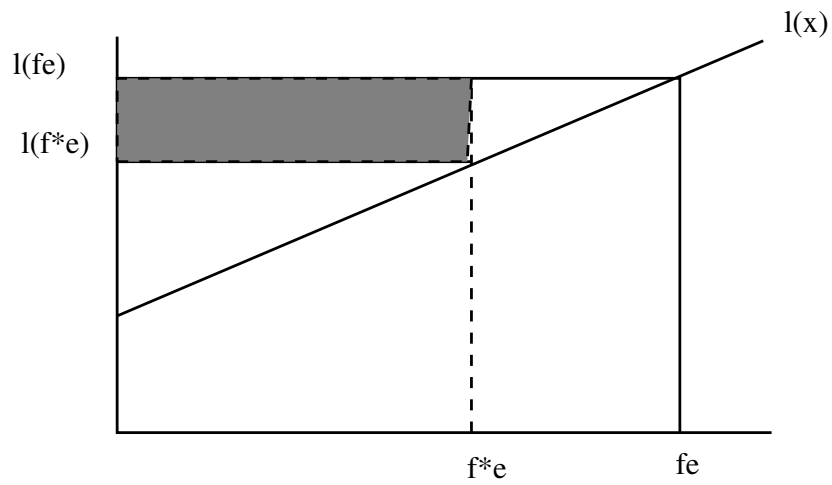


Figure 1: Die schräge Gerade steht für die Gerade  $\ell_e(x) = b_e + a_e x$ . Beachte, dass  $a_e \geq 0$  und  $b_e \geq 0$ . Die schraffierte Fläche ist gerade  $(\ell(f_e) - \ell(f_e^*))f_e^*$ . Sie ist höchstens ein Viertel der Fläche des Rechtecks  $\ell_f(e)f_e$ .

Damit haben wir

$$C(f) \leq 2C(f^*) + \frac{1}{4} \cdot C(f)$$

gezeigt. Also  $3C(f)/4 \leq 2C(f^*)$  oder  $C(f) \leq 8/3C(f^*)$ .

■