8. Optimierung

Optimierungsprobleme sind allgegenwärtig:

- Finde des schnellsten Weg von A nach B.
- Gegeben eine Menge von Arbeitern und eine Menge von Aufgaben. Die Arbeiter sind unterschiedlich geeignet für die Aufgaben und brauchen daher unterschiedlich lang für die Bearbeitung. Finde die Zuordnung der Aufgaben an die Arbeiter, die zu einer möglichst geringen Gesamtbearbeitungszeit führt.
- Steuere die Sägen in einem Sägewerk so, dass möglichst wertvolle Produkte erzeugt werden.
- Steuere einen Marschflugkörper so, dass er seine Gesamtflugstrecke nicht überschreitet und die Wahrscheinlichkeit, dass er abgefangen wird, minimiert wird.
- Optimiere den Fahrplan der Bundesbahn, der Saarbrücker Busse, ...
- Finde den optimalen Stundenplan für die UdS.
- Finde den Evakuierungsplan für ein Sportstadion.
- Berechne den billigsten Ernährungsplan (Diät).
- Berechne für eine Telefongesellschaft, wo Masten für den Mobilfunk aufgestellt werden sollen. Ziel ist eine möglichst große überdeckung bei geringen Kosten.

Wir benutzen Ernährungspläne als das leitende Beispiel dieses Kapitels, weil jeder von uns mit dem Problem vertraut ist, weil es immer wieder in der Diskussion ist, und weil es erlaubt, die Vorzüge aber auch die Grenzen von Optimierung aufzuzeigen.

Um ein Problem der realen Welt, etwa bestimme einen möglichst billigen Ernährungsplan, der Optimierung zugänglich zu machen, geht man in mehreren Schritten vor.

1. Genaue Formulierung des Problems und Erstellen eines mathematischen Modells.
2. Lösen des Modellproblems.
3. Rückübersetzen der Lösung in die reale Welt und Hinterfragen der Lösung. Ist die Lösung nützlich in der realen Welt oder weißt sie eher auf eine Schwäche der Modellierung hin?

Ein Modell faßt immer nur einen Ausschnitt der Wirklichkeit. Auch beim sorgfältigen Erstellen eines Modells kann es passieren, dass man wesentliche Aspekte der Wirklichkeit weglässt. Daher ist auch bei größter Sorgfalt des ersten Schritts, der drittte Schritt wesentlich. Die Lösung des Optimierungsproblems weißt oft auf Schwächen des Modells hin.

Man kann etwa beim Erstellen eines Fahrplans für die Bundesbahn die Modellannahme machen, dass Umsteigezeiten mindestens fünf Minuten sein müssen. Ein optimaler Fahrplan wird dann wahrscheinlich für sehr viele Verbindungen nur die Minimalumsteigezeit planen, auch für Verbindungen von Nebenverbindungen zu Hauptstrecken. Bei Inspektion der Lösung wird man dann feststellen, dass sie nur für schönes Wetter taugt und auch schon kleinste Verspätungen, die Lösung total durcheinander bringen. Als Konsequenz wird man manche Umsteigezeiten erhöhen oder sich überlegen, wie man die Robustheit eines Fahrplans gegenüber Störungen modellieren kann.

8.1. Optimale Ernährungspläne

George Stigler[1] [**?**] formulierte 1945 folgendes Optimierungsproblem: Wieviel kostet eine Ernährung, die alle Grundbedürfnisse erfüllt? Den Orginalartikel von Stigler finden sie auf der Webseite der Vorlesung. Die Aufgabe ist halb-spaßig, halb-ernst gemeint. Halb-spaßig, weil es auch damals natürlich schon Bücher und Zeitschriftenartikel zu ausgewogener und günstiger Ernährung gab, halb-ernst, weil der amerikanische Staat Hunderttausende von Soldaten zu ernähren hatte.

8.1.1. Modellierung

Stigler stellt sich zunächst die Frage, was eine hinreichende Ernährung ist. Er entscheidet sich für die Antwort: Eine Ernährung, die die Empfehlungen des National Research Councils bezüglich der Mindestmengen von 9 wesentlichen Nährstoffen (Kalorien, Eiweiß, Kalzium, Eisen, Vitamin A, Vitamin B1, Vitamin B2, Vitamin C, Vitamin B3, Vitamin C) erfüllt.

Er weißt aber ausdrücklich darauf hin, dass diese Empfehlungen wahrscheinlich unvollständig und ungenau sind. Es könne durchaus sein, dass der Bedarf für einige Vitamine überschätzt würde. Heute würde sicher eine obere Schranke für die Menge Fett im Speiseplan hinzugefügt. Auch würde man die Kalorienzahl niedriger ansetzen.

[1] George Joseph Stigler (geboren 17. Januar 1911 in Renton; gestorben 1. Dezember 1991 in Chicago) war ein US-amerikanischer Ökonom. Er war ein Hauptvertreter der Chicagoer Schule und Schüler von Frank Knight. Im Jahr 1982 erhielt er den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

Stigler leistete bedeutende Beiträge zur Neuen Politischen Ökonomie. Ausgezeichnet wurde er für seine Arbeit zu Industrial Organization, dem Funktionieren von Märkten und Ursachen und Folgen von Marktregulierung.

Table of nutrients considered in Stigler's diet Nutrient	Daily Recommended Intake
Calories	3,000 Calories
Protein	70 grams
Calcium	.8 grams
Iron	12 milligrams
Vitamin A	5,000 IU
Thiamine (Vitamin B1)	1.8 milligrams
Riboflavin (Vitamin B2)	2.7 milligrams
Niacin	18 milligrams
Ascorbic Acid (Vitamin C)	75 milligrams

Für die Zusammenstellung des Ernährungsplans betrachtet Stigler die 77 Nahrungsmittel, für die das Bureau of Labor Statistics regelmäßig die Preise ermittelt. Für jedes Nahrungsmittel entnimmt er der Literatur den Gehalt der verschiedenen Nährstoffe.

Er weißt ausdrücklich darauf hin, dass diese Zahlen mit Vorsicht zu genießen seien, da gewisse Arten der Zubereitung oder lange Lagerung gewisse Nährstoffe zerstörten und da die Tabelle nur Mittelwerte enthalte. So enthält etwa ein Apfel der Sorte Ontario 10x so viel Vitamin C enthalten wie ein Apfel der Sorte McIntosh.

8.1.2. Mathematisches Modell und Lösung

Das mathematische Modell sieht nun wie folgt aus: Für jedes der 77 Nahrungsmittel gibt es eine Variable $x_1, \dots, x_{77}$, die besagt wieviel Kilo des entsprechenden Nahrungsmittels im optimalen Ernährungsplan enthalten sind.

Für jeden der 9 Inhaltsstoffe gibt es die Bedingung, dass der Ernährungsplan den Inhaltstoff in hinreichender Menge zur Verfügung stellt. Für die Kalorien lautet die Bedingung:

$$\text{Kalorien pro Kilo von Nahrungsmittel 1} \cdot x_1 + \dots + \text{Kalorien pro Kilo von Nahrungsmittel 77} \cdot x_{77} \geq 3000.$$

Die Kosten des Ernährungsplans sind dann

$$\text{Preis pro Kilo von Nahrungsmittel 1} \cdot x_1 + \dots + \text{Preis pro Kilo von Nahrungsmittel 77} \cdot x_{77}.$$

Diesen gilt es zu minimieren.

Wir müssen nun Werte für die Variablen x_1 bis x_{77} so finden, dass alle Nebenbedingungen erfüllt sind und die Kosten minimiert werden.

Als Stigler seinen Artikel schrieb, gab es für Aufgaben dieser Art keinen Algorithmus. Es gab Algorithmen zur Lösung von Gleichungssystemen, aber keinen Algorithmus zur

Lösung von Ungleichungssystemen. Er bestimmte auf höchst intelligente Weise eine Näherungslösung.

Er überlegt sich zunächst, dass viele Nahrungsmittel von anderen Nahrungsmittel dominiert werden. Wenn A etwa billiger ist als B, aber von jedem Inhaltstoff mindestens so viel enthält wie B, dann kann man B aus der Menge der Nahrungsmittel streichen, ohne eine optimale Lösung zu verlieren. Auf diese Weise konnte er die Menge der zu betrachteten Nahrungsmittel auf 15 reduzieren.

Er ging dann weiter und konstruierte "künstliche Nahrungsmittel", etwa 5 Kilo Mehl plus 2 Kilo Kraut. Wenn ein künstliches Nahrungsmittel ein echtes Nahrungsmittel dominiert, kann man das echte wieder streichen. Auf diese Weise reduzierte er die Menge der Nahrungsmittel auf 9.

Stigler hatte nun neun Ungleichung in neun Variablen, die es zu erfüllen galt. Unter allen Lösungen der Ungleichungen wollte er diejenige finden, die die Kosten minimiert. Er argumentierte weiter. Die optimale Lösung erfüllt einige der Ungleichungen mit Gleichheit. Sonst könnte man die Werte einer Variablen verringern und hätte eine Lösung geringerer Kosten.

Es gibt $2^9 = 512$ Teilmengen der Ungleichungen. Stiglitz hat nicht alle untersucht, sondern einige Teilmengen mit Intuition ausgesucht. Für eine bestimmte Teilmenge, hat er dann das entsprechende Gleichungssystem gelöst. Allerdings hat ein System mit weniger Gleichungen als Unbekannte in der Regel viele Lösungen. Er sagt nicht genau in seinem Artikel, wie er hier vorgegangen ist.

Er kommt dann auf eine Lösung mit jährlichen Kosten von 39.93 Dollar.

Food	Annual Quantities	Annual Cost (in Dollars)
Wheat Flour	370 lb.	13.33
Evaporated Milk	57 cans	3.84
Cabbage	111 lb.	4.11
Spinach	23 lb.	1.85
Dried Navy Beans	285 lb.	16.80
Total Annual Cost		39.93

Er diskutiert die Frage, ob es noch deutlich besser geht und beantwortet die Frage mit Nein. Denn Mehl sei die billigste Art, Kalorien zu sich zu nehmen, und es bräuchte Mehl für 24.50 Dollar, um den Kalorienbedarf zu decken. Dann hätte man aber Kalzium kaum abgedeckt. Die billigste Quelle für Kalzium sei Käse. Dann kämen noch mal 14.90 Dollar dazu.

Schließlich vergleicht er seine Diät mit anderen Vorschlägen, die sämtlich viel teurer seien. Er meint, dass bei den anderen Vorschlägen das Optimierungsziel Kosten verwässert worden sei durch andere überlegungen der Autoren, etwa Schmackhaftigkeit. Diese anderen überlegungen seinen aber nicht präzise gefasst.

Erst 1947 hat Danzig einen Algorithmus zur Lösung von linearen Optimierungsproblemen gefunden. Der Algorithmus wurde auch an Stigler's Problem erprobt. Ein Team von 9 (menschlichen) Rechnern berechnete in 120 Manntagen die optimale Lösung: Der billigste Speiseplan kostet 39.69 Dollar. Stigler's Lösung lag nur 24 Cent darüber.

8.2. Lineare Optimierung

Georg Dantzig[2] erfand 1947 den Simplexalgorithmus für lineare Optimierungsprobleme. Weiterentwicklungen des Simplexalgorithmus sind unter den am häufigst benutzten Algorithmen.

Ich werde zunächst einen zeichnerischen Ansatz für lineare Optimierung besprechen, der aber nur für Probleme mit zwei Variablen funktioniert und dann einen allgemeinen Algorithmus (Fourier-Motzkin-Elimination), der allerdings wesentlich weniger effizient als der Simplexalgorithmus ist. Im Anschluss bespreche ich kurz den Simplexalgorithmus.

8.2.1. Lineare Optimierung

Wir haben Unbekannte (Variablen) $x_1, \ldots, x_n$, die reelle Werte annehmen können. Die Werte müssen lineare Bedingungen der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b.$$

erfüllen. Dabei sind die a_1 bis a_n und das b Konstante. Eine konkretes Beispiel ist etwa die Ungleichung $5x + 3y + 2z \leq 9$ in the Variablen x, y, und z. Ziel ist die Minimierung (oder Maximierung) einer linearen Zielfunktion

$$v := c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

[2]Auszug aus Wikipedia: George Bernard Dantzig (8. November 1914 in Portland (Oregon) – 13. Mai 2005 in Stanford (Kalifornien)) war ein US-amerikanischer Mathematiker. Er gilt als Vater der linearen Optimierung, eines Teilgebietes des Operations Research. Bekannt wurde er vor allem durch das von ihm entwickelte Simplex-Verfahren.

1946 nahm er erneut sein Studium auf und promovierte. Anschließend arbeitete er als mathematischer Berater beim Verteidigungsministerium, wo er 1947 das Simplex-Verfahren publizierte.

1952 wechselte Dantzig zur RAND Corporation, wo er maßgeblich dafür verantwortlich war, die lineare Programmierung auf Computern zu implementieren. 1960 nahm er eine Professur an der University of California in Berkeley an und wechselte dann 1966 auf eine Professur Operations Research and Computer Science der Stanford-Universität. Im Jahre 1973 war er Mitbegründer und erster Präsident der Mathematical Programming Society (MPS). Nach ihm ist der George-B.-Dantzig-Preis der SIAM benannt.

Sein bedeutendster wissenschaftlicher Beitrag ist das von ihm entwickelte Simplex-Verfahren. Außerdem war er einer der Mitbegründer der stochastischen und ganzzahligen Optimierung sowie Mitentwickler der Dantzig-Wolfe-Dekomposition im Jahre 1959/60. All diese Verfahren und ihre Verallgemeinerungen spielen heute eine große Rolle in der praktischen Anwendung der mathematischen Optimierung.

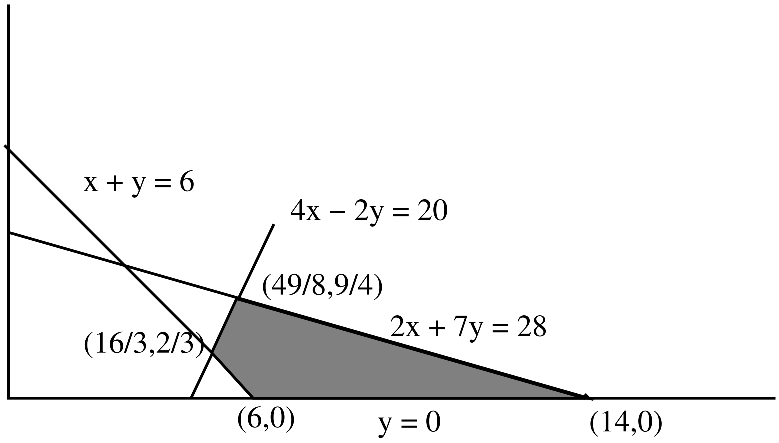

Abbildung 8.1.: Die Abbildung zeigt die vier Ungleichungen unseres Systems. Die graue Region umfasst alle Punkte, die sämtliche Ungleichungen erfüllen. Der höchste Punkt dieser Region ist der Schnittpunkt der Geraden $2x + 7y = 28$ und $4x - 2y = 20$ und hat die Koordinaten $(49/8, 9/4)$. Damit ist der maximale Wert von y gleich $9/4$.
Bei der Fourier-Motzkin Elimination kombinieren wir zum Beispiel die Ungleichungen $y \geq 0$ und $y \leq 10 - 2x$ zu $0 \leq 10 - 2x$. Die beiden Ungleichungen definieren einen Keil mit der Spitze $(5, 0)$. Alle Punkte im Keil erfüllen $x \geq 5$.

Als konkretes Beispiel betrachten wir ein System in Variablen x und y.

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad y \quad & \text{unter den Bedingungen} \\ 2x + 7y &\leq 28 \\ 4x - 2y &\geq 20 \\ x + y &\geq 6 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Abbildung 8.1 veranschaulicht das System. Die Gleichung $2x + 7y = 28$ definiert eine Gerade. Die Ungleichung $2x + 7y \leq 28$ besagt dann, dass wir nur an Punkten (x, y) interessiert sind, die auf oder unterhalb dieser Gerade liegen. Die vier Ungleichungen des obigen Systems definieren ein Viereck in der Ebene. Hätten wir mehr Ungleichungen, so wäre das zulässige Gebiet komplizierter. Von diesem Gebiet suchen wir den Punkt mit der größten y-Koordinate.

Das graphische Verfahren zum Finden der Lösung funktioniert nur bei zwei Variablen. Ich beschreibe als nächstes ein Verfahren, das immer funktioniert. Ich zeige zunächst, dass sich Optimierung auf Erfüllbarkeit zurückführen lässt, und zeige dann, wie man Erfüllbarkeit entscheidet. Erfüllbarkeit bezeichnet das Problem für eine Menge von Ungleichungen zu entscheiden, ob es eine Lösung gibt.

Reduktion von Optimierung auf Erfüllbarkeit Wir benutzen Binärsuche, um Optimierung auf Erfüllbarkeit zu reduzieren. Wir betrachten ein Maximierungsproblem.

Sei S ein System von Ungleichungen und sei $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ die Zielfunktion. Sei c eine beliebige Zahl. Wir betrachten das System S_c, das aus S und der Ungleichung $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \geq c$ besteht. Falls S_c erfüllbar ist, dann ist der Zielfunktionswert größer gleich c. Falls S_c nicht erfüllbar ist, dann ist der Funktionswert kleiner als c.

Wir benutzen nun Binärsuche, um den optimalen Wert der Zielfunktion zu bestimmen.

Um Binärsuche zu starten, brauchen wir noch Schranken für den optimalen Funktionswert. Solche Schranken sind oft leicht zu finden. Beim Diätproblem ist der Wert sicher mindestens null (da wir einen Dollarbetrag bestimmen) und höchstens 1000 Dollar in Preisen von 1939. Das sagt die Alltagserfahrung. Man kann aber auch so vorgehen. Für jeden der neun Nährstoffe wählt man ein Nahrungsmittel und kauft davon hinreichend viel, um den Bedarf zu decken. Auf diese Weise erhält man eine obere Schranke.

Erfüllbarkeit Betrachten wir zunächst unser Beispiel. Wir lösen die Ungleichungen nach y auf und erhalten

$$\begin{aligned}
y &\leq 4 - 2x/7\\
y &\leq -10 + 2x\\
y &\geq 6 - x\\
y &\geq 0.
\end{aligned}$$

Je zwei Ungleichungen beschränken y nach unten und nach oben. Durch Zusammensetzen erhalten wir (veranschauliche in der Abbildung)

$$\begin{aligned}
4 - 2x/7 &\geq y \geq 6 - x\\
4 - 2x/7 &\geq y \geq 0\\
-10 + 2x &\geq y \geq 6 - x\\
-10 + 2x &\geq y \geq 0
\end{aligned}$$

Das gibt uns die folgenden Bedingungen an x:

$$5x/7 \geq 2 \quad 2x/7 \leq 4 \quad 3x \geq 16 \quad 2x \geq 10.$$

Aufgelöst nach x lesen sich die Bedingungen wie folgt:

$$x \geq 14/5 \quad x \leq 14 \quad x \geq 16/3 \quad x \geq 5.$$

Das sind drei untere Schranken für x und eine obere Schranke. Wir können auch schreiben:

$$\max(14/5, 16/3, 5) \leq x \leq \min(14).$$

Jede Zahl x zwischen $16/3$ und 14 erfüllt diese Bedingung. Beachten sie, dass die kleine x-Koordinate einer Ecke des zulässigen Gebiets gerade 16/3 ist und die größte x-Koordinate gerade 5 ist.

Wir können für x einen beliebigen Wert zwischen (einschließlich) $16/3$ und 14 wählen, etwa $x = 7$. Wir setzen in die Ungleichungen für y ein und erhalten:

$$y \leq 2 \quad y \leq 4 \quad y \geq -1 \quad y \geq 0.$$

$y = 0$ erfüllt alle Ungleichungen.

Allgemein funktioniert Fourier-Motzkin Elimination (so heißt das Verfahren) wie folgt: Wir lösen alle Ungleichungen nach x_n auf. Dann gibt es drei Typen:

- Ungleichungen, in denen x_n nicht vorkommt.
- Ungleichungen, die x_n nach oben begrenzen
- Ungleichungen, die x_n nach unten begrenzen.

Die Ungleichungen der ersten Form übernehmen wir unverändert in die nächste Phase. Aus jeder Ungleichung der zweiten Art (etwa $x_n \leq Y$) und jeder Ungleichung der dritten Art (etwas $x_n \geq Z$) bilden wir eine Ungleichung $Z \leq Y$. Auf diese Weise erhalten wir Ungleichungen in den Variablen x_1 bis x_{n-1}. Wir fahren fort, bis wir alle Variablen eliminiert haben.

Am Schluss haben wir nur noch Ungleichungen zwischen Zahlen. Falls diese alle gültig sind, hat unser System eine Lösung, andernfalls, hat es keine Lösung.

Fourier-Motzkin Elimination ist einfach zu formulieren. Es hat den großen Nachteil, dass sich die Anzahl der Ungleichungen in jedem Schritt im wesentlichen quadrieren kann.

8.2.2. Der Simplexalgorithmus

Wir veranschaulichen den Algorithmus an dem Beispiel von Abbildung 8.1. Die Grundidee des Algorithmus ist sich auf dem Rand des zulässigen Gebiets von Lösung zu Lösung zu schreiten und dabei den Wert der Zielfunktion in jedem Schritt zu verbessern.

Man verschafft sich dazu zunächst eine Ecke des zulässigen Gebiets, etwa die Ecke $(6, 0)$. Von dieser Ecke aus, kann man in zwei Richtungen auf dem Rand entlangwandern, nämlich entlang der Geraden $y = 0$ und entlang der Geraden $x + y = 6$. Das Folgen der ersten Kante bringt keine Verbesserung, da der Zielfunktionswert stets Null bleibt. Das Folgen der Kante $x + y = 6$ bringt aber eine Verbesserung, da y wächst. Wir folgen der Kante bis wir die Ecke $(16/3, 2/3)$ erreichen. Von dieser Ecke aus können wir den Kanten $x + y = 6$ und $4x - 2y = 20$ folgen. Nur die zweite bringt eine Verbesserung und daher folgen wir ihr bis wir den Punkt $(49/8, 9/4)$ erreichen. Beide Kanten, die zu dieser

Ecke inzident sind, führen zu kleineren y-Werten. Daher haben wir die optimale Ecke erreicht.

Bei Problemen mit n Variablen definieren die Ungleichungen einen Polyeder im $\mathbb{R}^n$. Man geht nun im Prinzip genauso vor. Man verschafft sich zunächst eine Ecke des Polyeders und untersucht die zu der Ecke inzidenten Kanten; das sind in der Regel n Stück. Man fragt sich, ob ein Wandern entlang einer der Kanten zu einer Verbesserung der Zielfunktion führt. Ist das nicht der Fall, so ist die Ecke optimal. Ist das der Fall, so folgt man einer verbesserenden Kante bis man den anderen Endpunkt der Kante erreicht. Für den anderen Endpunkt stellt man die gleiche überlegung an.

Im Allgemeinen gibt es mehrere verbesserende Kanten und man hat die Wahl der Qual. Eine einfache Regel ist der Kante zu folgen, bei der sich die Zielfunktion am meisten (am schnellsten) ändert.

Der Simplexalgorithmus ist für viele praktische Probleme sehr effizient. Er findet oft nach einer linearen Anzahl von Iterationen (linear in der Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen) eine optimale Lösung. Es sind aber Beispiele bekannt, bei denen die Laufzeit exponentiell ist.

8.2.3. Polynomielle Verfahren für die Lineare Optimierung

Es gibt Algorithmen für die Lineare Optimierung, der Laufzeit polymiell ist. Die Ellipsoidmethode ist hauptsächlich von theoretischem Interesse, die innere Punktmethode auch von großem praktischen Interesse.

8.3. Die Gefahren schlechter Modellierung und/oder Daten

Das Ergebnis einer Optimierung kann nie besser sein als das Modell und die Daten. Ein Artikel von Georg Dantzig [**?**] gibt davon in sehr anschaulicher Weise Zeugnis.

Dantzig sollte abnehmen und seine Ernährung auf 1500 Kalorien pro Tag begrenzen. Er wollte lineare Programmierung benutzen, um eine optimale Diät zu bestimmten.

Er hatte Angst davor, ständig Hunger zu haben. Daher wollte er das Sättigungsgefühl der Diät maximieren. Da Wasser sehr schnell ausgeschieden wird, wählte er als Koeffizienten in der Zielfunktion

Gewicht des Nahrungsmittel minus Gewicht des enthaltenen Wassers.

Die erste Lösung lieferte unter anderem: 500 Gallonen Essig pro Tag. Warum? In den Daten stand, dass Essig eine schwache Säure sei, kaum Kalorien hätte, und *kein* Wasser enthalte. Dantzig strich Essig aus der Menge der Nahrungsmittel.

Am zweiten Tag lieferte das Programm: 200 Brühwürfel. Er probierte eine Suppe mit 3 Brühwürfeln und schüttete die Suppe wegen des hohen Salzgehalts weg. Er fragte seinen Arzt, dass es doch sicher eine Schranke für den Salzkonsum gäbe und warum diese nicht Teil der Ernährungsempfehlungen sei. Anwort: die meisten Menschen seien vernünftig und würden versalzene Mahlzeiten nicht essen.

Er führte eine obere Schranke von drei Brühwürfeln in die Diät ein. Nach seiner Aussage, die Geburtsstunde von oberen Schranken in linearer Optimierung.

Am nächsten Tag sollte er dann 2 Pfund Kleie pro Tag essen. Seine Frau verbot ihm, soviel Kleie zu essen.

Er führte eine obere Schranke für Kleie ein. Das Ergebnis: 2 Pfund Molasse

Schließlich wurde es seiner Frau zu bunt und sie übernahm das Regime. Dantzig nahm 22 Pfund (amerikanische Pfund) ab.