Lecture

Information Retrieval for Music and Motion

Meinard Müller

Max-Planck-Institut für Informatik
Campus E1 4, 66123 Saarbrücken, Germany
meinard@mpi-inf.mpg.de

Übungsblatt zum Dynamic Time Warping (DTW)

Lösung zu Aufgabe 1

$$\mathrm{DTW}(X,Y)=3,\quad \mathrm{DTW}(X,Z)=3,\quad \mathrm{DTW}(Y,Z)=3.$$

Lösung zu Aufgabe 2

$$C=\begin{pmatrix}5&4&4&1\\3&2&2&3\\3&2&2&3\\6&5&5&0\\0&1&1&6\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}17&13&13&9\\12&9&9&8\\9&7&7&5\\6&5&6&2\\0&1&2&8\end{pmatrix}$$

Ein optimaler Warping-Pfad ist durch

$$((1,1),(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4))$$

gegeben. Dieser ist eindeutig.

Lösung zu Aufgabe 3

Es seien $X=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ und $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_M)$ zwei beliebige Folgen über $\mathcal{F}$. Weiterhin sei $p=(p_1,\ldots,p_L)$ mit $p_\ell=(n_\ell,m_\ell)\in[1:N]\times[1:M]$, $\ell\in[1:L]$, ein Warping-Pfad zwischen X und Y mit Gesamtkosten

$$c_p(X,Y):=\sum_{\ell=1}^{L}c(x_{n_\ell},y_{m_\ell}).$$

Wir definieren den Pfad $q=(q_1,\ldots,q_L)$ durch $q_\ell:=(m_\ell,n_\ell)\in[1:M]\times[1:N]$. Es folgt unmittelbar, dass q ein Warping-Pfad zwischen Y und X definiert. Weiterhin folgt aufgrund der Symmetrie von c, dass $c_q(Y,X)=c_p(X,Y)$. Hieraus folgt, dass q genau dann ein optimaler Warping-Pfad zwischen Y und X ist, falls p ein optimaler Warping-Pfad zwischen X und Y ist. Daraus folgt $\mathrm{DTW}(X,Y)=\mathrm{DTW}(Y,X)$.

Es sei $\mathcal{F}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ und $c:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch $c(x,y):=1-\delta_{xy}$. Weiterhin sei $X=\alpha\beta\gamma$, $Y=\alpha\beta\beta\gamma$ und $Z=\alpha\gamma\gamma$. Dann gilt $\mathrm{DTW}(X,Y)=\mathrm{DTW}(Y,X)=0$, $\mathrm{DTW}(X,Z)=1$ und

$$\mathrm{DTW}(Y,Z)=2>1=\mathrm{DTW}(Y,X)+\mathrm{DTW}(X,Z).$$

Die Dreiecksungleichung ist damit verletzt.

Lösung zu Aufgabe 4

Es bezeichne L_k die Pfadlänge des auf Stufe k entstehenden Warping-Pfades bezüglich der Folgen X_k und Y_k der Länge 2^{n-k+1}, $1 \leq k \leq n$. Dann gilt

$$L_k \leq 2 \cdot 2^{n-k+1} = 2^{n-k+2},$$

also z. B. $L_1 \leq 2N$, $L_2 \leq 2(N/2) = N$, etc. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
A^{\mathrm{MsDTW}}(N) &= A^{\mathrm{MsDTW}}\left(\frac{N}{2}\right) + f_1^2 \cdot L_2 \\
&\leq A^{\mathrm{MsDTW}}\left(\frac{N}{2}\right) + 4 \cdot N \\
&= A^{\mathrm{MsDTW}}\left(\frac{N}{2^2}\right) + f_2^2 \cdot L_3 + 4 \cdot N \\
&\leq A^{\mathrm{MsDTW}}\left(\frac{N}{2^2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{N}{2}\right) + 4 \cdot N \\
&\leq \ldots \\
&\leq A^{\mathrm{MsDTW}}\left(\frac{N}{2^{n-1}}\right) + 4 \cdot \left(\frac{N}{2^{n-2}}\right) \ldots + 4 \cdot \left(\frac{N}{2^2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{N}{2}\right) + 4 \cdot N \\
&\leq A^{\mathrm{DTW}}(2) + 4 \cdot \left(4 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n\right) \\
&\leq 4 \cdot \sum_{k=0}^{n} 2^k \\
&\leq 8N
\end{aligned}$$

Die Formel beweist man leicht durch vollständige Induktion.